TU v Liberci	Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Přijímací zkoušky z MATEMATIKY pro akademický rok 2011/2012	KMD FP

NMgr. studium Učitelství matematiky ZŠ, SŠ

Registrační číslo uchazeče

Datum zkoušky ____________________

Příklad	1	2	3	4	5	**Celkem**
Body						

Varianta 1

UPOZORNĚNÍ: Není dovoleno používat tabulky ani kalkulačky. U řešení každého příkladu musí být uveden postup.

ZADÁNÍ:

1. Určete intervaly monotonie a lokální extrémy funkce $y = x - 2\operatorname{arctg} x$.

2. Vypočtěte integrál $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$ a najděte obor, kde je tento integrál definován.

3. Vypočtěte matici $\mathbf{X}$ z rovnice $\mathbf{X}\begin{bmatrix}1&0&0\\3&1&0\\2&0&1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&2&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{bmatrix}^4$ pro matice nad $\mathbb{Z}_5$ (počítáme modulo 5).

4. Vyřešte v $\mathbf{C}$ algebraickou rovnici $x^7 + x^6 - 2x^5 + 8x^4 + 8x^3 - 16x^2 = 0$.
Nejprve určete (násobné?) racionální kořeny. Stupeň snižujte Hornerovým algoritmem.
Načrtněte graf polynomu! Nakreslete kořeny v komplexní rovině!

5. Určete délky úseků vyťatých na kartézských souřadnicových osách tečnou k parabole $y^2 = 12x$ rovnoběžnou s přímkou $3x - y + 5 = 0$.

Př. č.	**VÝSLEDKY**
1	
2	
3	
4	
5	

ŘEŠENÍ:

1. příklad

a) $D(f) = (-\infty; +\infty)$, funkce je lichá (použít pro kontrolu).

b) $y = x - 2\operatorname{arctg} x$, $\quad y' = 1 - \dfrac{2}{x^2+1} = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $\quad y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

c) Souhrnná tabulka

x	(-∞; -1)	-1	(-1; 1)	1	(1; +∞)
f	roste	π/2 – 1	klesá	1 – π/2	roste
$f\,'$	+	0	–	0	+

Funkce *roste* v každém z intervalů (-∞; -1), (1; +∞); *klesá* v intervalu (-1; 1);
lextry jsou dva: lmax = $f(-1) = \pi/2 - 1 \approx 0{,}57$, lmin = $f(1) = 1 - \pi/2 \approx -0{,}57$.

2. příklad

a) Definiční obor integrandu:

$$x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$$

$$\underline{\underline{D(f) = \mathbf{R} \setminus \{-2; 1\}}}$$

b) Rozklad racionálního integrandu na parciální (elementární) zlomky

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$$

$$x + 5 = A(x-1) + B(x+2)$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostaneme

x | $1 = A + B \quad \Rightarrow B = 1 - A \quad \Rightarrow \quad B = 1 - (-1) = 2$

x^0 | $5 = -A + 2B \quad \Rightarrow 5 = -A + 2 - 2A \quad \Rightarrow \quad 3A = -3 \quad \Rightarrow A = -1$

c) Výpočet integrálu rozložené racionální funkce:

$$\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x+2} + \int \frac{2\mathrm{d}x}{x-1} = -\ln|x+2| + 2\ln|x-1| + C =$$

$$\underline{\underline{= \ln\left|\frac{(x-1)^2}{x+2}\right| + C}}, \text{ kde } x \in \mathrm{I} \subset \mathbf{R} \setminus \{-2; 1\},\ C \in \mathbf{R}.$$

3. příklad

➲ Počítání v $\mathbb{Z}_5$ (tzn. **mod 5**, tj. průběžně redukce na zbytky)

a) $XA - 2B = C^4 \Rightarrow X = (C^4 + 2B)A^{-1}$, $C^4 = (C^2)^2$ ⌊počítáme **mod 5**⌉

b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \equiv_5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ⌊matice s podvěšeným sloupcem, $-3 \equiv_5 2$⌉

c) $C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 \equiv_5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad C^4 = (C^2)^2 \equiv_5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv_5 \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}}$

4. příklad

a) $P_7(x) := (x^5 + x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 8x - 16)x^2 \Rightarrow 0$ je 2násobným kořenem, $x_{1,2} = 0$.

b) Kandidáty na racionální kořeny jsou $\pm\{1, 2, 4, 8, 16\}$.

	1	1	-2	8	8	-16	
1		1	2	0	8	16	
	1	2	0	8	16	$\boxed{0}$	
~~-1~~		~~-1~~	~~-1~~	~~1~~	~~-9~~		
	~~1~~	~~1~~	~~-1~~	~~9~~	~~7~~	> 0	
-2		-2	0	0	-16		
	1	0	0	8	$\boxed{0}$		
-2		-2	4	-8			
	1	-2	4	$\boxed{0}$			

3 znamén. změny $\Rightarrow$ 3 nebo 1 kladné kořeny!

Ze zadání hned rozklad: $(x^2 + x - 2)(x^3 + 8)$.

$\Rightarrow$ Rozklad: $(x + 2)(x^3 + 8)$.

$\Rightarrow$ Číslo 1 je 1násobným kořenem, $x_3 = 1$.

$\Rightarrow x^3 + 8 = 0$, binomická rovnice.

Hned rozklad: $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

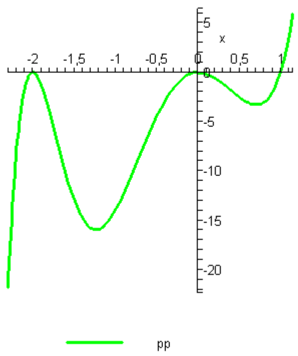
$\Rightarrow$ Číslo -2 je 2násobným kořenem, $x_{4,5} = -2$.

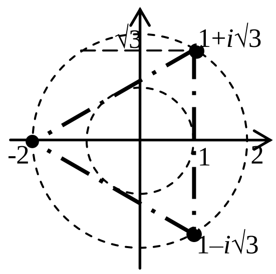
c) $x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x_{6,7} = 1 \pm i\sqrt{3}$, dvojice komplexně sdružených kořenů.

Celkem množina kořenů je $\{-2\ 2\times, 0\ 2\times, 1, 1 \pm i\sqrt{3}\}$ a rozklad v **R**:

$P_7(x) = (x + 2)^2 x^2 (x - 1)(x^2 - 2x + 4)$.

Graf polynomu





---

5. příklad

a) Tečna rovnoběžná s přímkou má její směrnici, takže má rovnici tvaru

$y = 3x + c$.

Konstantu c určíme z podmínky, že parabola a její tečna mají jediný společný bod.

Vyřešením soustavy

$y^2 = 12x \quad \Rightarrow \quad x = y^2/12$

$y = 3x + c \quad \Rightarrow \quad y = y^2/4 + c,\quad$ tj. $y^2/4 - y + c = 0$.

b) Kvadratická rovnice má jediný (2násobný) kořen, je-li její diskriminant roven 0, tj. zde, když $1 - 4c/4 = 0$. Odtud $c = 1$ a rovnice tečny je $\underline{y = 3x + 1}$.

c) Tato přímka protíná souřadnicovou osu Ox v bodě $[-1/3; 0]$ $\lfloor 0 = 3x+1 \Rightarrow x = -1/3 \rceil$.

Oy $[0; 1]$ $\lfloor y = 3x+1, x = 0 \Rightarrow y = 1 \rceil$.

Délka úseku vyťatého na ose x je 1/3,

y 1.