

3. KŘIVKY

3.1 Vektorová funkce

3.1.1 Parametrické, explicitní a vektorové rovnice křivek v E_3

Příklad 1: (6x 1 bod)

Vektorovou funkcí zapište:

a) přímku q : $x = 3 + 2t, t \in \mathbf{R}$
 $y = -2 - 7t$
 $z = 6 - 9t$

b) elipsu e : $x = 2 \cdot \cos t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
 $y = 3 \cdot \sin t$
 $z = 4$

c) asteroidu a : $x = 4 \cdot \cos^3 t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
 $y = 4 \cdot \sin^3 t$
 $z = 0$

d) šroubovici s : $x = 7 \cdot \cos t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$
 $y = 7 \cdot \sin t$
 $z = 5t$

e) parabolu p : $y = x^2 - 4x + 5$

f) sinusoidu: $y = \sin \frac{x}{3}$

3.1.2 Definiční obor vektorové funkce

Příklad 2: (1 bod)

Určete definiční obor dané vektorové funkce $\mathbf{r}(t) = (t + 5, \ln t, \sqrt{1-t})$.

3.2 Klasifikace bodů křivek

Příklad 3: (3 body)

Určete singulární body křivky $\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \cdot \sin t, \sin t - t \cdot \cos t, 0)$, $t \in \mathbf{R}$.

3.3 Tečna křivky v regulárním bodě

Příklad 4: (2 body)

Napište parametrickou rovnici tečny ke křivce $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (e^t, 1-t, 2t)$, $t \in \mathbf{R}$, v jejím regulárním bodě $t_0 = 0$.

3.4 Průvodní trojhran křivky

Příklad 5: (5 bodů)

Určete jednotkové směrové vektory průvodního trojhranu křivky $\mathbf{r}(t) = (\sin t, 1 - \cos t, 4 \cdot \sin \frac{t}{2})$, $t \in \mathbf{R}$, v bodě $t_0 = 0$.

Příklad 6: (5 bodů)

Určete směrový vektor binormály křivky $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t}, t\sqrt{2})$, $t \in \mathbf{R}$, v bodě $t_0 = 0$ a určete úhly, které svírá s vektory souřadnicové báze.

Příklad 7: (8 bodů)

Určete prvky průvodního trojhranu (parametrické rovnice tečny, binormály, hlavní normály a obecné rovnice normálové, oskulační a rektifikační roviny) křivky $\mathbf{r}(t) = (t^2, \ln t, t^3)$, $t \in (0, +\infty)$, v bodě $t_0 = 1$.

Příklad 8: (8 bodů)

Vypočítejte vzdálenost bodu $A[5, 2, -5]$ od tečny sestrojené v bodě $T(t_0 = 0)$ křivky $\mathbf{r}(t) = (t^2 + 1, \ln(t + 1), e^{-t})$, $t \in (-1, +\infty)$.

3.5 První křivost křivky, oskulační kružnice křivky

Příklad 9: (6 bodů)

Vypočítejte hodnotu 1. křivosti a poloměr křivosti ve vrcholu paraboly $y = 5 - 4x - x^2$. Určete souřadnice středu oskulační kružnice a запиšte implicitní rovnici oskulační kružnice ve vrcholu paraboly. Načrtněte obrázek.

Příklad 10: (4 body)

Je dána elipsa $x = a \cdot \cos t, y = 5 \cdot \sin t, z = 0, t \in (0, 2\pi)$. Jaká musí být velikost její poloosy a , jestliže poloměr křivosti v hlavních vrcholech je $\rho = \frac{125}{15}$?