

WAVELETY

Dana Černá

<http://www.fp.tul.cz/kmd/>

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická Univerzita v Liberci

Wavelet Toolbox

Waveletovou analýzu můžeme provádět pomocí okna Wavelet Toolbox Menu nebo pomocí příkazů zadávaných v pracovním prostředí nebo v programech.

Wavelet Toolbox Menu otevřeme zadáním příkazu

» wavemenu

nebo volbou

Start → Toolboxes → Wavelet → Wavelet Toolbox Main Menu

One-Dimensional

Wavelet 1-D

Wavelet Packet 1-D

Continuous Wavelet 1-D

Complex Continuous Wavelet 1-D

Continuous Wavelet 1-D (Using FFT)

Two-Dimensional

Wavelet 2-D

Wavelet Packet 2-D

Three-Dimensional

Wavelet 3-D

Multiple 1-D

Multisignal Analysis 1-D

Multivariate Denoising

Multiscale Princ. Comp. Analysis

Wavelet Design

New Wavelet for CWT

Specialized Tools 1-D

SWT Denoising 1-D

Density Estimation 1-D

Regression Estimation 1-D

Wavelet Coefficients Selection 1-D

Fractional Brownian Generation 1-D

Specialized Tools 2-D

True Compression 2-D

SWT Denoising 2-D

Wavelet Coefficients Selection 2-D

Image Fusion

Display

Wavelet Display

Wavelet Packet Display

Extension

Signal Extension

Image Extension

Close

Wavelet Toolbox Menu

- 1D waveletová analýza
- 2D waveletová analýza
- 3D waveletová analýza
- vícerozměrná waveletová analýza
- konstrukce waveletu
- další nástroje v 1D a 2D
- zobrazení waveletů
- rozšíření signálu a obrazu

Wavelet Display

Zvolíme typ a řád waveletu a zmáčkneme Display. Máme k dispozici typy:

haar - Haarův wavelet

db - Daubechies wavelet

sym - symmlety

coif - Coifmanovy wavelety, coiflety

bior - biortogonální wavelety

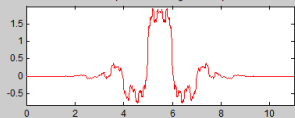
rbio - jako bior, ale obrácené pořadí waveletů pro dekompozici a rekonstrukci

meyer, dmey, gaus ... patří mezi wavelety, které nemají kompaktní nosič

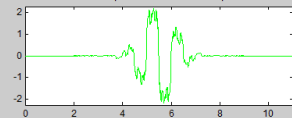
Okno s obrázky můžeme uložit (ve formátech .eps, .png, .pdf ...).

Biorthogonal Wavelet => bior3.5

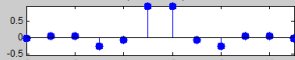
Decomposition scaling function phi



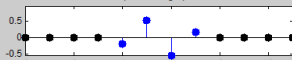
Decomposition wavelet function psi



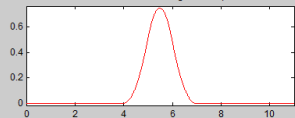
Decomposition low-pass filter



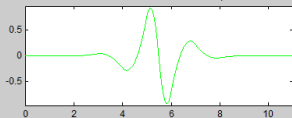
Decomposition high-pass filter



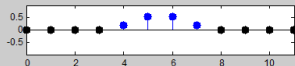
Reconstruction scaling function phi



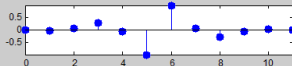
Reconstruction wavelet function psi



Reconstruction low-pass filter



Reconstruction high-pass filter



Wavelet bior 3.5

Refinement 8

Display

Information on:

BiorSplines Family (BIOR)

All Wavelet Families

X+ Y+ XY+
X- Y- XY-Center
On

X Y

Info

X =
Y =

History

<< >>
<<< >>>

View Axes

Close

Při volbě waveletu pro analýzu signálu a obrazu hraje roli zejména:

- počet nulových momentů waveletu
- délka nosiče škálové funkce a waveletu
- hladkost waveletu

Wavelet 1-D

Nejprve je třeba načíst signál. Zvolíme

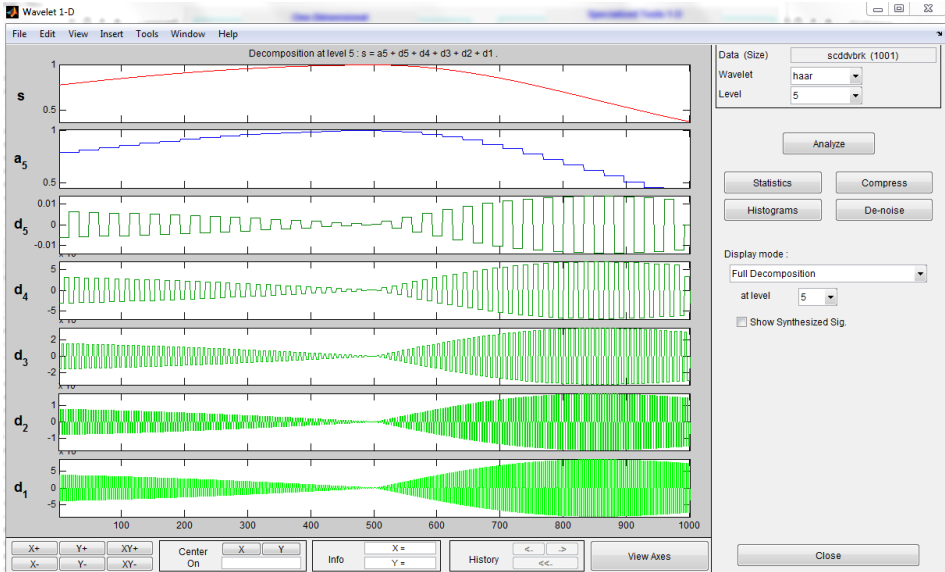
File → Example Analysis → Basic Signal

→ with db4 at level 2, Second Derivative Breakdown

Můžeme zvolit wavelet a jeho řád a počet úrovní rozkladu.

Již jsme se seznámili s Haarovou analýzou, zvolme proto: Wavelet Haar, Level 5 a klikneme na Analyze.

Dostaneme rozklad pomocí Haarova waveletu na pěti úrovních. Zřejmá nevýhoda Haarova waveletu je jeho nespojitost a tedy nepříliš dobrá aproximace hladkých funkcí.

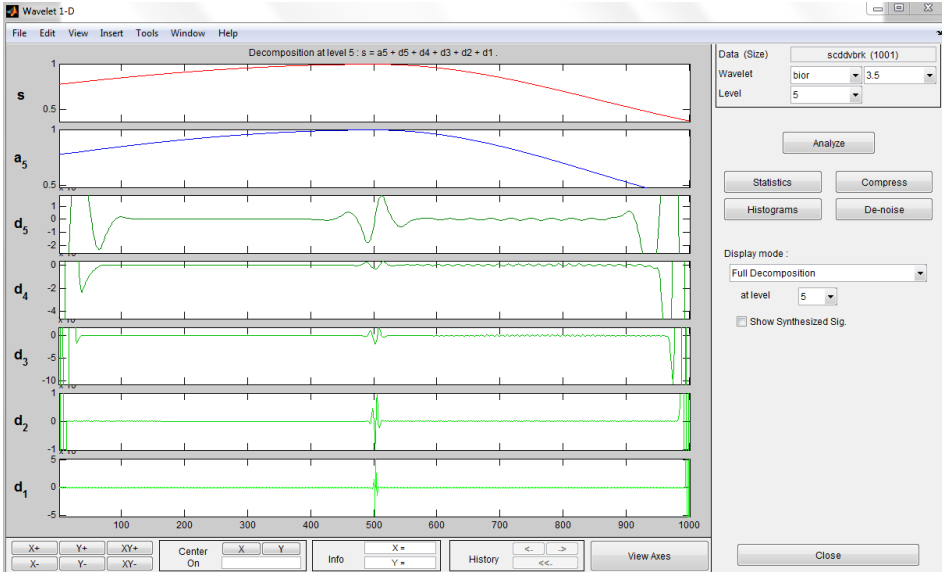


Wavelet 1-D

Zvolíme hladší wavelet, například bior3.3 a ponecháme pět úrovní rozkladu.

Nyní jsou již waveletové koeficienty malé tam, kde je funkce hladká a větší jsou pouze tam, kde je nějaká singularita, například zde nespojitost ve druhé derivaci kolem bodu 500.

Dále jsou koeficienty velké blízko okrajů. Je to způsobeno tím, že dwt byla navržena pro nekonečný signál a pokud ji chceme použít na konečný signál, musíme signál na okrajích nějakým způsobem rozšířit tak, aby bylo možné filtry aplikovat také na okrajích. Tak může na okrajích vzniknout singularita (většinou nespojitost v první derivaci), která má za následek velké koeficienty na okrajích.



Wavelet 1-D

Další volby:

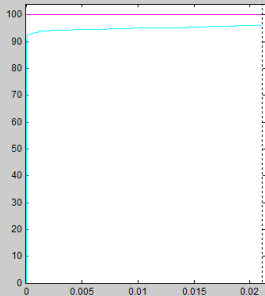
Statistics - zobrazení statistik (průměr, medián, směrodatná odchylka ...) pro původní signál, rekonstruovaný signál, aproximace a detaily

Histogram - zobrazení histogramu

Compress - komprese signálu

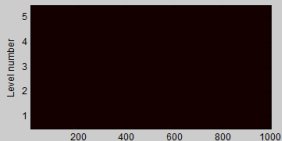
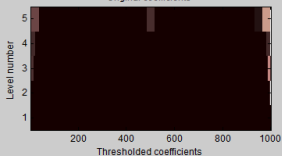
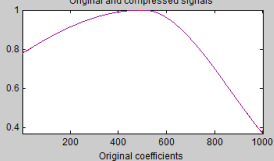
De-noise - odšumění signálu

Zvolme Compress. Tento signál má většinou waveletových koeficientů nulových nebo téměř nulových, lze tedy signál reprezentovat pomocí poměrně málo koeficientů bez větší ztráty informace, tj. rekonstruovaný signál se téměř shoduje s původním.



- - - Global threshold
 — Norm coefs recovery in %
 — Number of zeros in %

Energy ratio 100.00 % -- Zeros 96.10 %
Original and compressed signals



Data (Size)
 Wavelet
 Level

Global thresholding

Select thresholding method

Select Global Threshold

Norm cfs recovery %

Number of zeros %

Compress

Residuals

View Compressed Signal

Colormap
 Nb. Colors

Close

Center On

Info

History

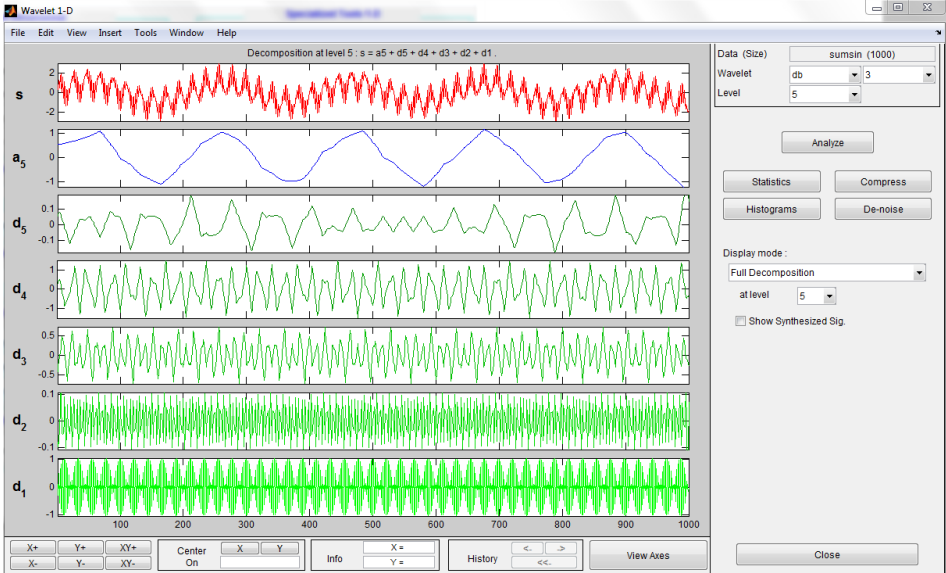
View Axes

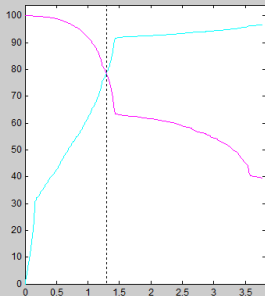
Wavelet 1-D

Zadaný signál byl hladký až na nespojitost ve druhé derivaci v jednom bodě. Nyní zvolíme

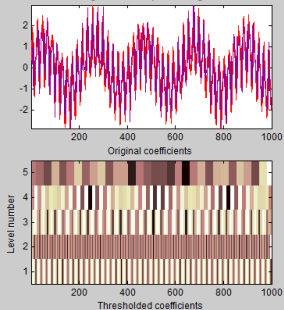
File → Example Analysis → Basic Signal
→ with db3 at level 5, Sum of sines

Zvolme Compress. V grafu vlevo je modře znázorněna závislost počtu nul na zvoleném prahu, fialově zachovaná energie. Globální práh je nastaven v bodě, ve kterém se tyto grafy protínají. Další grafy znázorňují původní signál a jeho waveletové koeficienty. Pro dané nastavení znovu zvolme Compress. Zobrazí se modře rekonstruovaný signál a waveletové koeficienty po prahování. Nulové koeficienty jsou zobrazeny černě.





---- Global threshold
 --- Retained energy in %
 --- Number of zeros in %



Data (Size)
 Wavelet
 Level

Global thresholding

Select thresholding method

Select Global Threshold

Retained energy %

Number of zeros %

Compress

Residuals

View Compressed Signal

Colormap
 Nb. Colors

Close

X+ Y+ XY+
 X- Y- XY-

Center
 On

X Y

Info

X =
 Y =

History

< >
 << >>

View Axes

Wavelet 1-D

Další volby:

Residuals - zobrazí signál reprezentující chybu a jeho statistiky

View Compressed Signal - zobrazení rekonstruovaného signálu v novém okně

Global Thresholding (jeden práh pro koeficienty všech úrovní), By Level Thresholding (určíme práh pro každou úroveň)

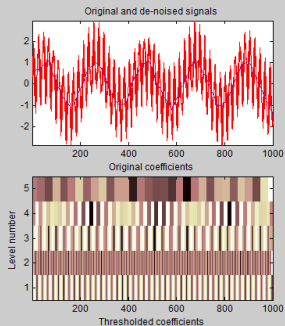
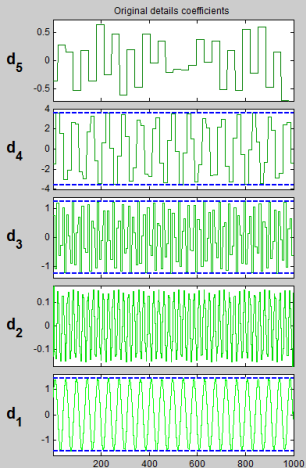
Balance Sparsity Norm - zvolen práh tak, aby zachovaná energie byla přibližně rovna počtu nulových koeficientů (v %), Remove Near Zero, můžeme také zvolit vlastní globální práh.

Wavelet 1-D

Nyní zvolme De-noise. Máme možnost si zvolit metodu pro prahování, zda chceme měkké nebo tvrdé prahování, typ šumu a práh pro jednotlivé úrovně.

Po kliknutí na De-noise se zobrazí signál s odstraněným šumem, waveletové koeficienty pro prahování a prahy pro jednotlivé úrovně.

Další volby: Residuals, View Denoised Signal



Data (Size)

Wavelet

Level

Select thresholding method

soft hard

Select noise structure

Lev	Int	Select	Thresh
5	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0.988"/>	0.988
4	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="3.579"/>	3.579
3	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1.227"/>	1.227
2	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="0.294"/>	0.294
1	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="1.428"/>	1.428

Int. dependent threshold settings

De-noise

Residuals

View Denoised Signal

Colormap

Nb. Colors

Close

X+ Y+ XY+
X- Y- XY-

Center
On

X Y

Info

X+ Y+

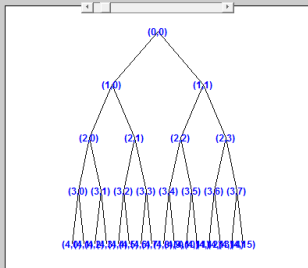
History

View Axes

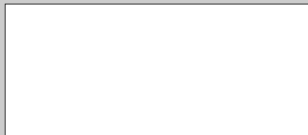
Wavelet Packet

Dekompozice signálu pomocí balíčků waveletů se od dwt liší tím, že rozkládáme v každém kroku nejen aproximaci \mathbf{c}_j , ale také detaily \mathbf{d}_j .

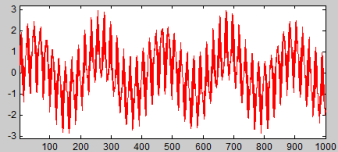
Decomposition Tree



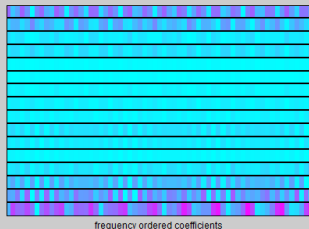
Node Action Result



Analyzed Signal : length = 1000



Colored Coefficients for Terminal Nodes



frequency ordered coefficients

Scale of Colors from Min to Max

Data (Size) Wavelet Level Entropy

Analyze

Compress

De-noise

Initial Tree

Wavelet Tree

Best Tree

Best Level

Cut Tree at Level :

Node Label :

Node Action :

Select Nodes and

Reconstruct

Full Size

Cts Col.

Colormap

Nb. Colors

Close

Center
On

Info

History

View Axes

Signal Extension

Jak jsme se již zmínili, signál je nutné rozšířit, aby mohly být škálové a waveletové filtry aplikovány také na okrajích. Jako výchozí rozšíření je nastaveno symetrické rozšíření.

Diskrétní waveletová transformace:

spočívá v aplikaci filtrů $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$

$$c_k = \sum_{i=1}^n f_i v_{2k+1-i}, d_k = \sum_{i=1}^m g_i v_{2k+1-i}, k \in \mathbb{Z}$$

Musí existovat filtry \tilde{f} a \tilde{g} , které určují inverzní waveletovou transformaci pomocí vztahů

$$c_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{k-2n} c_{j-1,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{k-2n} d_{j-1,n}.$$

Filtry \mathbf{f} , \mathbf{g} , $\tilde{\mathbf{f}}$ a $\tilde{\mathbf{g}}$ se konstruují pomocí funkcí, které se nazývají wavelety. V závislosti na aplikaci musí mít určité vlastnosti, např. nulové momenty filtrů \mathbf{g} a $\tilde{\mathbf{g}}$, kompaktní nosič filtrů $\tilde{\mathbf{f}}$ a $\tilde{\mathbf{g}}$. Tyto vlastnosti zajišťují příslušné wavelety.

Okrajové jevy

Příklad: filtry: $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3, g_4)$

vstupní vektor

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$$

transformovaný vektor

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$$

$$w_1 = f_4 v_1 + f_3 v_2 + f_2 v_3 + f_1 v_4$$

$$w_2 = f_4 v_3 + f_3 v_4 + f_2 v_5 + f_1 v_6$$

$$w_4 = g_4 v_1 + g_3 v_2 + g_2 v_3 + g_1 v_4$$

$$w_5 = g_4 v_3 + g_3 v_4 + g_2 v_5 + g_1 v_6$$

$$w_3 = ?, w_6 = ?$$

1. Rozšíření signálu

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$$

$$w_1 = f_4 v_1 + f_3 v_2 + f_2 v_3 + f_1 v_4$$

$$w_2 = f_4 v_3 + f_3 v_4 + f_2 v_5 + f_1 v_6$$

$$w_3 = f_4 v_5 + f_3 v_6 + f_2 v_7 + f_1 v_8$$

$$w_4 = g_4 v_1 + g_3 v_2 + g_2 v_3 + g_1 v_4$$

$$w_5 = g_4 v_3 + g_3 v_4 + g_2 v_5 + g_1 v_6$$

$$w_6 = g_4 v_5 + g_3 v_6 + g_2 v_7 + g_1 v_8$$

2. Speciální filtry pro okraje

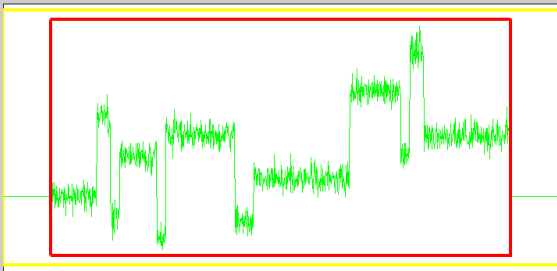
$$(f_5, f_6), (g_5, g_6)$$

$$w_3 = f_6 v_5 + f_5 v_6$$

$$w_6 = g_6 v_5 + g_5 v_6$$

Rozšíření signálu na okrajích

- Rozšíření nulou (zpd) -
... 0 0 0 0 **1 2 3 4 5** 0 0 0 0 ...
- Symetrizace (sym, symh) -
... 4 3 2 1 **1 2 3 4 5** 5 4 3 2 ... (half point),
... 5 4 3 2 **1 2 3 4 5** 4 3 2 1 ... (whole point)
- Asymetrické rozšíření (asym, asymh) -
... -4 -3 -2 -1 **1 2 3 4 5** -5 -4 -3 -2 ...
- Hladké rozšíření řádu 1 (sp1) -
... -3 -2 -1 0 **1 2 3 4 5** 6 7 8 9 ...
- Hladké rozšíření řádu 0 (sp0) -
... 1 1 1 1 **1 2 3 4 5** 5 5 5 5 ...
- Periodické rozšíření (ppd) -
... 2 3 4 5 **1 2 3 4 5** 1 2 3 4 ...

Signal Length Next Power of 2 Previous Power of 2 Desired Length Direction to extend

Extension Mode

Info

History

Příkazy pro 1D waveletovou analýzu

- `dwtmode` - nastavení způsobu rozšíření na okrajích
- `dwt` - diskrétní waveletová transformace
- `idwt` - inverzní diskrétní waveletová transformace
- `wavedec` - waveletová dekompozice
- `waverec` - waveletová rekonstrukce
- `wmaxlev` - maximální úroveň pro waveletovou dekompozici

```
>> x = 0:0.001:1;
>> yp=abs(cos(10*x));
>> plot(x,yp);
>> y=abs(cos(10*x))+0.1*randn(1,1001);
>> plot(x,y);
>> [c,d]=dwt(y,'db3','mode','zpd');
>> plot([c,d]);
>> d=wthresh(d,'h',0.2)
>> yt=idwt(c,d,'db3','mode','zpd');
>> plot(yt);
>> size(yt);
```

```
>> N=wmaxlev(1001,'db3')
>> dwtmode('sp0');
>> [C,L]=wavedec(y,4,'db3');
>> plot(C);
>> L
>> length(C)
>> D=C(1,68:1020);
>> D=wthresh(D,'h',0.3);
>> C=[C(1,1:67),D];
>> yn=waverec(C,L,'db3');
>> plot(yn);
```