

DISKRÉTNÍ WAVELETOVÁ TRANSFORMACE

Dana Černá

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

Technická univerzita v Liberci

Osnova

- Diskrétní Haarova transformace
- Diskrétní waveletová transformace
- Aplikace diskrétní waveletové transformace
- Okrajové jevy
- Waveletová báze
- Řešení diferenciálních rovnic

Diskrétní Haarova transformace

filtry: $\mathbf{f} = (f_1, f_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

vstupní vektor: $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$, n sudé

výstupní vektor: $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_{n/2})$, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{n/2})$

první krok dwt: $\mathbf{v} \rightarrow (\mathbf{c}, \mathbf{d})$

$$c_k := \sum_{i=1}^2 f_i v_{2k+1-i}, \quad k = 1, \dots, n/2$$

$$d_k := \sum_{i=1}^2 g_i v_{2k+1-i}, \quad k = 1, \dots, n/2$$

$$c_1 = f_2 v_1 + f_1 v_2 = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$d_1 = g_2 v_1 + g_1 v_2 = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

$$c_2 = f_2 v_3 + f_1 v_4 = \frac{v_3 + v_4}{2}$$

$$d_2 = g_2 v_3 + g_1 v_4 = \frac{v_3 - v_4}{2}$$

$$c_3 = f_2 v_5 + f_1 v_6 = \frac{v_5 + v_6}{2}$$

$$d_3 = g_2 v_5 + g_1 v_6 = \frac{v_5 - v_6}{2}$$

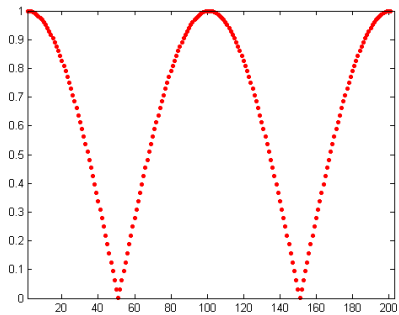
\vdots

\vdots

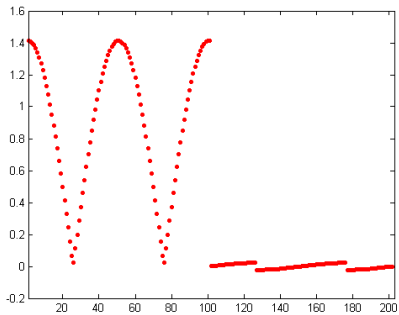
$$c_{n/2} = f_2 v_{n-1} + f_1 v_n = \frac{v_{n-1} + v_n}{2}$$

$$d_{n/2} = g_2 v_{n-1} + g_1 v_n = \frac{v_{n-1} - v_n}{2}$$

Původní vektor



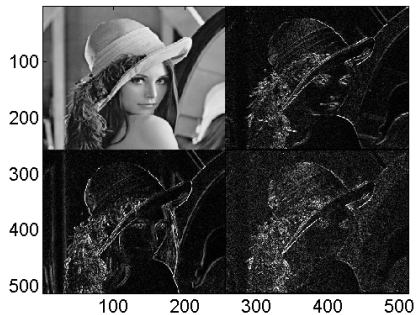
Transformovaný vektor



Původní obrázek



Transformovaný obrázek



diskrétní Haarova transformace: $\mathbf{v} \rightarrow [\mathbf{c}^M, \mathbf{d}^M, \dots, \mathbf{d}^2, \mathbf{d}^1]$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbf{v} & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbf{c}^1 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbf{c}^2 & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \dots & \mathbf{c}^{M-1} & \xrightarrow{\mathbf{f}} & \mathbf{c}^M . \\
 & \searrow \mathbf{g} & & \searrow \mathbf{g} & & \searrow \mathbf{g} & & & \searrow \mathbf{g} & \\
 & & \mathbf{d}^1 & & \mathbf{d}^2 & & \mathbf{d}^3 & \dots & & \mathbf{d}^M
 \end{array}$$

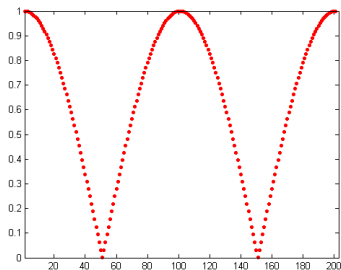
inverzní Haarova transformace: $[\mathbf{c}^M, \mathbf{d}^M, \dots, \mathbf{d}^2, \mathbf{d}^1] \rightarrow \mathbf{v}$

$$c_{2k-1}^j := c_k^{j+1} + d_k^{j+1}, \quad k = 0, \dots, n/2^j, \quad j = 1, \dots, M-1$$

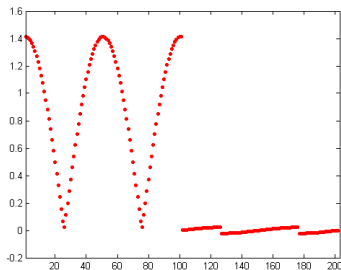
$$c_{2k}^j := c_k^{j+1} - d_k^{j+1}, \quad k = 1, \dots, n/2^j, \quad j = 0, \dots, M-1$$

$$\mathbf{v} := \mathbf{c}^0$$

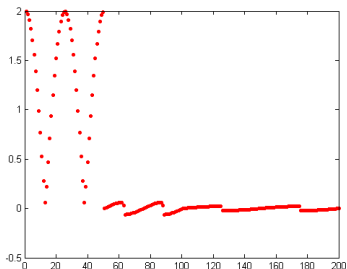
Původní vektor



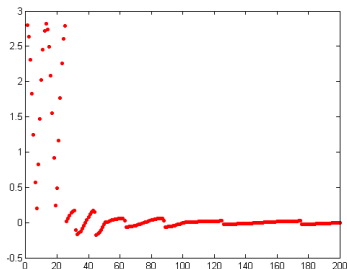
Transformovaný vektor, $M = 1$



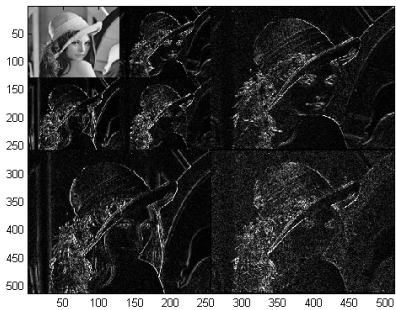
Transformovaný vektor, $M = 2$



Transformovaný vektor, $M = 3$



Transformovaný obrázek, $M = 2$



Diskrétní waveletová transformace:

spočívá v aplikaci filtrů $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m)$

$$c_k = \sum_{i=1}^n f_i v_{2k+1-i}, d_k = \sum_{i=1}^m g_i v_{2k+1-i}, k \in \mathbb{Z}$$

Musí existovat filtry \tilde{f} a \tilde{g} , které určují inverzní waveletovou transformaci pomocí vztahů

$$c_{j,k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{h}_{k-2n} c_{j-1,n} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{g}_{k-2n} d_{j-1,n}.$$

Filtry \mathbf{f} , \mathbf{g} , $\tilde{\mathbf{f}}$ a $\tilde{\mathbf{g}}$ se konstruují pomocí funkcí, které se nazývají wavelety. V závislosti na aplikaci musí mít určité vlastnosti, např. nulové momenty filtrů \mathbf{g} a $\tilde{\mathbf{g}}$, kompaktní nosič filtrů $\tilde{\mathbf{f}}$ a $\tilde{\mathbf{g}}$. Tyto vlastnosti zajišťují příslušné wavelety.

Aplikace diskrétní waveletové transformace

- detekce singularit, změn
- určení trendu a periodicity
- řídká reprezentace, komprese
- odstranění šumu, zhlazování
- změny ve variabilitě časové řady
- numerické řešení diferenciálních a integrálních rovnic

Okrajové jevy

Příklad: filtry: $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3, g_4)$

vstupní vektor

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$$

transformovaný vektor

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6)$$

$$w_1 = f_4 v_1 + f_3 v_2 + f_2 v_3 + f_1 v_4$$

$$w_2 = f_4 v_3 + f_3 v_4 + f_2 v_5 + f_1 v_6$$

$$w_4 = g_4 v_1 + g_3 v_2 + g_2 v_3 + g_1 v_4$$

$$w_5 = g_4 v_3 + g_3 v_4 + g_2 v_5 + g_1 v_6$$

$$w_3 = ?, w_6 = ?$$

1. Rozšíření signálu

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8)$$

$$w_1 = f_4 v_1 + f_3 v_2 + f_2 v_3 + f_1 v_4$$

$$w_2 = f_4 v_3 + f_3 v_4 + f_2 v_5 + f_1 v_6$$

$$w_3 = f_4 v_5 + f_3 v_6 + f_2 v_7 + f_1 v_8$$

$$w_4 = g_4 v_1 + g_3 v_2 + g_2 v_3 + g_1 v_4$$

$$w_5 = g_4 v_3 + g_3 v_4 + g_2 v_5 + g_1 v_6$$

$$w_6 = g_4 v_5 + g_3 v_6 + g_2 v_7 + g_1 v_8$$

2. Speciální filtry pro okraje

$$(f_5, f_6), (g_5, g_6)$$

$$w_3 = f_6 v_5 + f_5 v_6$$

$$w_6 = g_6 v_5 + g_5 v_6$$

Rozšíření signálu na okrajích

- Rozšíření nulou (zpd) -
... 0 0 0 0 **1 2 3 4 5** 0 0 0 0 ...
- Symetrizace (sym) -
... 4 3 2 1 **1 2 3 4 5** 5 4 3 2 ... (half point),
... 5 4 3 2 **1 2 3 4 5** 4 3 2 1 ... (whole point)
- Asymetrické rozšíření (asym) -
... -4 -3 -2 -1 **1 2 3 4 5** -5 -4 -3 -2 ...
- Hladké rozšíření řádu 1 (sp1) -
... -3 -2 -1 0 **1 2 3 4 5** 6 7 8 9 ...
- Hladké rozšíření řádu 0 (sp0) -
... 1 1 1 1 **1 2 3 4 5** 5 5 5 5 ...
- Periodické rozšíření (ppd) -
... 2 3 4 5 **1 2 3 4 5** 1 2 3 4 ...

Waveletová báze

Waveletovou bází nazýváme množinu $\Psi = \Phi_{j_0} \cup \bigcup_{j=j_0}^{\infty} \Psi_j$, která je Rieszovou (stabilní) bází prostoru $L^2(\mathbb{R})$.

Funkce z množiny Φ_{j_0} se nazývají **škálové funkce**, požadujeme, aby generovali polynomy až do stupně $N - 1$.

Funkce z množiny Ψ_j se nazývají **wavelety**, požadujeme, aby měli nulové momenty až do řádu $\tilde{N} - 1$.

Dále požadujeme, aby funkce waveletové báze byly lokální, to je velikost nosiče klesá exponenciálně v závislosti na úrovni j .

Jeden krok diskrétní waveletové transformace je reprezentován maticí \mathbf{M}_j , která splňuje $(\phi_j, \psi_j)^T = \mathbf{M}_j^T \phi_{j+1}$

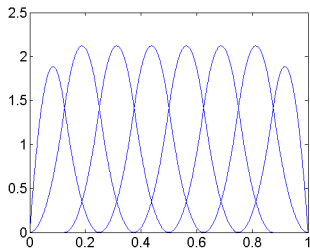
Waveletová transformace $\mathbf{T}_{j,s}$ pro více úrovní je potom určena vztahem:

$$\Psi_{j,s} = \mathbf{T}_{j,s}^T \phi_{j+s},$$

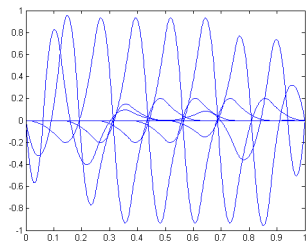
kde $\Psi_{j,s}$ je multiškálová báze $\Psi_{j,s} := \phi_j \cup \bigcup_{l=j}^{j+s-1} \psi_l$.

Multiškálová báze $\Psi_{3,3}$ pro biortogonální 3.3 wavelety

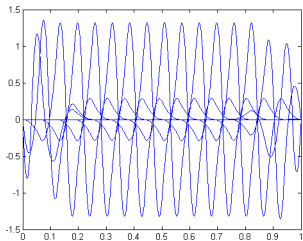
Φ_3



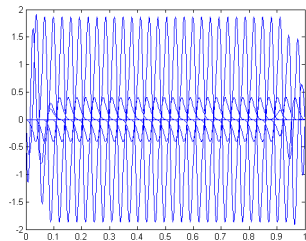
Ψ_3



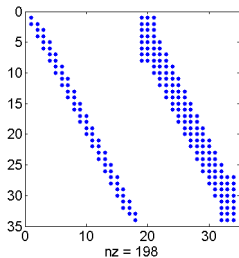
Ψ_4



Ψ_5

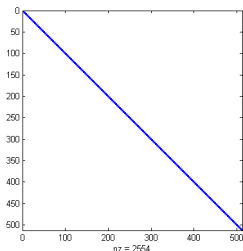


Struktura matice \mathbf{M}_3 reprezentující diskrétní waveletovou transformaci pro biortogonální 3.3 wavelety:



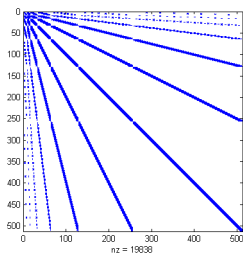
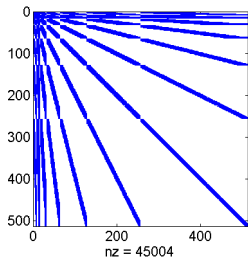
Lokalita bázových funkcí implikuje řídkost této matice.

Uvažujme rovnici $-u'' = f$ na intervalu $[0, 1]$ s okrajovými podmínkami $u(0) = u(1) = 0$. Matice tuhosti \mathbf{S}_9 pro škálovou bázi Φ_9 má strukturu



Číslo podmíněnosti matice tuhosti ve škálové bázi roste kvadraticky v závislosti na úrovni j . Pro Φ_9 je podmíněnost matice tuhosti 39841.

Matice tuhosti $\mathbf{W}_{3,6}$ pro waveletovou bázi $\Psi_{3,6}$ má strukturu



Vlevo je struktura matice, pokud bereme všechny nenulové prvky, vpravo je struktura matice po vynulování prvků menších než 10^{-5} . Při použití diagonálního předpodmiňovače je číslo podmíněnosti matice tuhosti ve waveletové bázi stejnoměrně omezeno, to je lze ji omezit konstantou, která nezávisí na úrovni. Pro $\Psi_{3,6}$ je podmíněnost matice tuhosti 12,8.

Pro výpočet matice tuhosti ve waveletové bázi není vhodné použít kvadrurní pravidlo, protože nosič waveletových funkcí na vysoké úrovni je velmi malý a bylo by proto potřeba použít velmi mnoho bodů, což by vedlo k vysoké výpočetní náročnosti. Proto se tyto matice počítají pomocí diskretní waveletové transformace matice tuhosti ve škálové bázi.

Použití waveletové báze umožňuje adaptivní řešení dané úlohy, protože je možné využít kompresní vlastnost waveletů.

Příklad: Matici tuhosti $\mathbf{W}_{3,6}$ příslušnou multiškálové bázi $\Psi_{3,6}$ určíme pomocí matice tuhosti \mathbf{S}_9 pro škálovou bázi Φ_{3+6} , tj. Φ_9 .

Nejprve pomocí diskretní waveletové transformace reprezentované maticí \mathbf{M}_8 převedeme \mathbf{S}_9 na matici tuhosti pro multiškálovou bázi $\Psi_{8,1}$:

$$\mathbf{W}_{8,1} = \mathbf{M}_8^T \mathbf{S}_9 \mathbf{M}_8,$$

Provedeme další transformaci na tu část matice $\mathbf{W}_{8,1}$, která přísluší škálové bázi. Dostaneme matici tuhosti pro bázi $\Psi_{7,2}$:

$$\mathbf{W}_{7,2} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_7 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \mathbf{M}_8^T \mathbf{S}_9 \mathbf{M}_8 \begin{pmatrix} \mathbf{M}_7 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{I} označuje jednotkovou matici vhodné velikosti.

Tímto způsobem pokračujeme. Pro matici tuhosti pro $\Psi_{3,6}$ dostaneme vztah:

$$\mathbf{W}_{3,6} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \cdots \begin{pmatrix} \mathbf{M}_7 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}^T \mathbf{M}_8^T \mathbf{S}_9 \mathbf{M}_8 \begin{pmatrix} \mathbf{M}_7 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \mathbf{M}_3 & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix},$$

kde \mathbf{I} označuje jednotkové matice vhodné velikosti.