

Cvičení 13

Příklad 1. Vypočtěte zobecněné Riemannovy integrály

- $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left(= \lim_{y \rightarrow 1^-} \arcsin y = \frac{\pi}{2} \right),$
- $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \quad \left(= \frac{3}{2} \left(\lim_{y \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{y^2} - \lim_{y \rightarrow 0^+} \sqrt[3]{y^2} \right) = 0 \right).$

Příklad 2. Určete obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = -x^2 + 4x - 3$ a jejími tečnami v bodech $[0, -3]$ a $[3, 0]$. $\left(\frac{9}{4} \right)$

Příklad 3. Určete obsah obrazce ohraničeného funkcemi $f_1(x) = \frac{x^3 - 16x}{6}$ a $f_2(x) = \frac{x^3 - 16x}{24}$. (16)

Příklad 4. Určete obsah obrazce ohraničeného křivkou $y = a \sin^3 t$, $x = a \cos^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, kde $a > 0$ a osami $x = 0$ a $y = 0$. $\left(\frac{3a^2\pi}{32} \right)$

Příklad 5. Obsah obrazce ohraničeného grafem spojitě a nezáporné funkce $r = f(\varphi)$ a přímkami určenými polárními úhly α a β , kde $\alpha < \beta$ a $\beta - \alpha \leq 2\pi$ je roven

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Určete obsah obrazce ohraničeného křivkou $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2)$, kde $a > 0$.
Nápověda: Nejprve transformujte zadanou křivku do polárních souřadnic a pak aplikujte výše uvedený vzorec. (a^2)

Příklad 6. Určete délku úsečky $y = ax + b$ na intervalu $[c, d]$. $\left((d - c)\sqrt{1 + a^2} \right)$

Příklad 7. Odvoďte, jak vypadá jednotkové okolí bodu $[0, 0]$ v metrikách:

- $\varrho_2([x, y], [0, 0]) \leq 1 : \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} \leq 1,$
- $\varrho_1([x, y], [0, 0]) \leq 1 : |x - 0| + |y - 0| \leq 1,$
- $\varrho_{max}([x, y], [0, 0]) \leq 1 : |x - 0| \leq 1$ a zároveň $|y - 0| \leq 1.$

Příklad 8. Uveďte příklady uzávěru množiny, uzavřené množiny, okolí bodu, prstencového okolí bodu, vnitřního bodu, vnitřku, otevřené množiny a hranice množiny.