# Cvičení 1

Symbolem $\overset{c}{=}$ budeme značit rovnost až na přičtení libovolné reálné konstanty. Tedy místo $\displaystyle\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$ budeme psát $\displaystyle\int x\,dx \overset{c}{=} \frac{x^2}{2}$.

**Příklad 1. Vypočtěme $\int \mathbf{x^2 \sin x \, dx}$.** Položme

$$\begin{aligned} u(x) &= x^2 & v'(x) &= \sin x \\ u'(x) &= 2x & v(x) &= -\cos x. \end{aligned}$$

Funkce $x^2$, $-\cos x$ mají spojité derivace v intervalu $(-\infty, \infty)$, proto v tomto intervalu platí

$$\int x^2 \sin x\,dx \overset{c}{=} -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx.$$

K výpočtu integrálu napravo opět použijeme per partes. Položme

$$\begin{aligned} u(x) &= x & v'(x) &= \cos x \\ u'(x) &= 1 & v(x) &= \sin x. \end{aligned}$$

Funkce $x$, $\sin x$ mají spojité derivace v intervalu $(-\infty, \infty)$, proto v tomto intervalu platí

$$\int x \cos x\,dx \overset{c}{=} x \sin x - \int \sin x\,dx \overset{c}{=} x \sin x + \cos x.$$

Celkem tedy dostaneme

$$\int x^2 \sin x\,dx \overset{c}{=} -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\,dx \overset{c}{=} -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x.$$

**Příklad 2. Vypočtěme $\int \mathbf{\ln x \, dx}$.** Pomocí per pertes

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & v'(x) &= 1 \\ u'(x) &= \tfrac{1}{x} & v(x) &= x. \end{aligned}$$

Funkce $x$, $\ln x$ mají spojité derivace v intervalu $(0, \infty)$, proto v tomto intervalu platí

$$\int \ln x\,dx \overset{c}{=} x \ln x - \int \frac{1}{x} x\,dx \overset{c}{=} x \ln x - x \overset{c}{=} x(\ln x - 1).$$

**Příklad 3. Vypočtěme $\mathbf{K_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx}$ $\mathbf{(n \in \mathbb{Z},\ n \geq 0)}$.**

Víme, že $K_1 = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} x$, pro $x \in (-\infty, \infty)$ a nyní pomocí per partes najdeme rekurentní formuli pro $n \geq 2$). Pro $n > 0$ platí

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{1}{(1+x^2)^n} & v'(x) &= 1 \\
u'(x) &= \frac{-2nx}{(1+x^2)^{n+1}} & v(x) &= x.
\end{aligned}
$$

Funkce $\frac{1}{(1+x^2)^n}$, $x$ mají spojité derivace v intervalu $(-\infty, \infty)$, proto v tomto intervalu platí

$$
K_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx
$$

nyní k čitateli v nově vzniklém integrálu přičteme a odečteme jedničku a poté integrand rozdělíme na dva zlomky

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{c}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{(1+x^2)-1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \\
&\stackrel{c}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1+x^2}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \\
&\stackrel{c}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{1}{(1+x^2)^n} - \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\,dx \\
&\stackrel{c}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1};
\end{aligned}
$$

tedy $K_n \stackrel{c}{=} \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nK_n - 2nK_{n+1}$ a odtud dostaneme hledaný rekurentní vzorec

$$
K_{n+1} \stackrel{c}{=} \frac{x}{2n(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} K_n. \tag{1}
$$

Vypočtěme například $K_3 = \int \frac{1}{(1+x^2)^3}\,dx$. Dosazením do rekurentního vzorce (1) postupně dostaneme (pro $n = 2$) $K_3 \stackrel{c}{=} \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}K_2$ a (pro $n = 1$) $K_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}K_1$. Zpětným dosazením obdržíme $K_2 \stackrel{c}{=} \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$ a nakonec

$$
K_3 \stackrel{c}{=} \frac{x}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x.
$$

**Příklad 4. Vypočtěme $\int \frac{\ln \mathbf{x}}{\mathbf{x}}\,\mathbf{dx}$.** Pomocí per partes

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x \quad & v'(x) &= \tfrac{1}{x} \\ u'(x) &= \tfrac{1}{x} \quad & v(x) &= \ln x. \end{aligned}$$

Funkce $\ln x$ má spojitou derivaci v intervalu $(0, \infty)$, proto v tomto intervalu platí

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx \stackrel{c}{=} \ln^2 x - \int \frac{\ln x}{x}\,dx. \tag{2}$$

Protože integrand je spojitá funkce, existuje tedy primitivní funkce. Můžeme tedy k oběma stranám rovnice (2) přičíst $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ a dostaneme

$$2\int \frac{\ln x}{x}\,dx \stackrel{c}{=} \ln^2 x \qquad\qquad \int \frac{\ln x}{x}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{\ln^2 x}{2}.$$

**Příklad 5. Vypočtěme $\int \sin \mathbf{x}\, \mathbf{e}^{\mathbf{x}}\,\mathbf{dx}$.** Využijeme opět per partes

$$\begin{aligned} u(x) &= \sin x \quad & v'(x) &= e^x \\ u'(x) &= \cos x \quad & v(x) &= e^x. \end{aligned}$$

Funkce $\sin x$, $e^x$ mají spojité derivace v intervalu $(-\infty, \infty)$, proto v tomto intervalu platí

$$\int \sin x\, e^x\,dx \stackrel{c}{=} \sin x\, e^x - \int \cos x\, e^x\,dx. \tag{3}$$

Aplikujeme-li per partes opačně dostaneme

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x \quad & v'(x) &= \sin x \\ u'(x) &= e^x \quad & v(x) &= -\cos x. \end{aligned}$$

Funkce $\cos x$, $e^x$ mají spojité derivace v intervalu $(-\infty, \infty)$, proto v tomto intervalu platí

$$\int \sin x\, e^x\,dx \stackrel{c}{=} -\cos x\, e^x + \int \cos x\, e^x\,dx. \tag{4}$$

Oba integrandy jsou spojité funkce a tedy obě primitivní funkce existují na libovolném otevřeném intervalu. Sečtením a odečtením rovnic (3) a (4) dostaneme:

$$\int \sin x\, e^x\,dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\sin x\, e^x - \cos x\, e^x), \qquad \int \cos x\, e^x\,dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}(\sin x\, e^x + \cos x\, e^x).$$

**Příklad 6. Vypočtěme $\int \sin^3 t \cos t \, dt$.** Vidíme, že $\cos t \, dt$ je diferenciál funkce $\sin t$, proto zavedeme substituci $x = \sin t$. Potom $dx = \cos t \, dt$ a předpoklady věty o substituci jsou splněny na intervalu $(-\infty, \infty)$ a tedy na tomto intervalu platí

$$\int \sin^3 t \cos t \, dt \stackrel{c}{=} \int x^3 \, dx \stackrel{c}{=} \frac{x^4}{4} \stackrel{c}{=} \frac{\sin^4 t}{4}.$$

**Příklad 7. Vypočtěme $\int f(ax+b) \, dx$ pro $a \neq 0$, známe-li primitivní funkci $F$ k funkci $f$.** Vidíme, že $dx$ je po vynásobení číslem $a$ diferenciál funkce $ax+b$, proto zavedeme substituci $y = ax + b$. Potom $dy = a \, dx$ a předpoklady věty o substituci jsou splněny na otevřeném intervalu, ve kterém je funkce $f$ spojitá. V tomto intervalu tedy platí

$$\int f(ax+b) \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{a} \int f(ax+b) \, a \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{a} \int f(y) \, dy \stackrel{c}{=} \frac{1}{a} F(y) \stackrel{c}{=} \frac{F(ax+b)}{a}.$$

**Příklad 8. Vypočtěme $\int (1+x^2)^n x \, dx$ pro $n \neq -1$.** Vidíme, že $x \, dx$ je po vynásobení dvěma diferenciál funkce $1+x^2$, proto zavedeme substituci $y = 1+x^2$. Potom $dy = 2x \, dx$ a předpoklady věty o substituci jsou splněny na intervalu $(-\infty, \infty)$ a tedy na tomto intervalu pro $n \neq -1$ platí

$$\int \left(1+x^2\right)^n x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \int \left(1+x^2\right)^n 2x \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \int y^n \, dy \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \frac{y^{n+1}}{n+1} \stackrel{c}{=} \frac{\left(1+x^2\right)^{n+1}}{2n+2}.$$

**Příklad 9. Vypočtěme $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx$.** Zaveďme substituci $y = f(x)$. Potom $dy = f'(x) \, dx$ a předpoklady věty o substituci jsou splněny v otevřeném intervalu, ve kterém $f'$ existuje a zároveň je v tomto intervalu $f(x) \neq 0$. V takovém intervalu tedy platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx \stackrel{c}{=} \int \frac{1}{y} \, dy \stackrel{c}{=} \ln|y| \stackrel{c}{=} \ln|f(x)|.$$

Například:

$$\int \frac{x}{x^2+1} \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} \, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \qquad \text{platí v intervalu } (-\infty, \infty),$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx \stackrel{c}{=} -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx \stackrel{c}{=} -\ln|\cos x| \qquad \text{platí například v intervalu } \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

**Příklad 10. Vypočtěme $\int \frac{1}{x^2+4} \, dx$.** Zaveďme substituci $y = 2x$ $(x = \frac{y}{2})$. Potom $dy = 2 \, dx$ a předpoklady věty o substituci jsou splněny na intervalu $(-\infty, \infty)$. Na tomto intervalu tedy platí

$$\int \frac{1}{x^2+4} \, dx \stackrel{c}{=} \int \frac{2}{(2y)^2+4} \, dy \stackrel{c}{=} \int \frac{2}{4(y^2+1)} \, dy \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{y^2+1} \, dy \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} y \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$$

**Příklad 11. Vypočtěme $\displaystyle\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}$.**

Použijeme-li substituci $x^2+1=\varphi(x)=t$, potom roste-li $x$ od 1 do 2, roste i $t$ od 2 do 5 (tedy $\varphi(1)=2$ a $\varphi(2)=5$). Dále je $2x\,dx=dt$ a můžeme tedy použít větu o substituci v určitém integrálu

$$\int_1^2 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2}\int_2^5 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}=\Big[\sqrt{t}\Big]_2^5=\sqrt{5}-\sqrt{2}.$$

**Příklad 12. Spočtěme $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx$, kde $\frac{p^2}{4}-q<0$ (tedy rovnice $x^2+px+q$ nemá reálné kořeny) a $n$ je celé kladné.** Derivace výrazu $x^2+px+q$ je $2x+p$, a proto pomocí následující úpravy rozdělíme zadaný integrál na dva: $Mx+N=\frac{M(2x+p)}{2}+N-\frac{Mp}{2}$ a tedy máme

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx=\frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}. \tag{5}$$

První integrál snadno spočteme pomocí substituce $x^2+px+q=t$, potom (2x+p)dx=dt a

$$\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\,dx=\int \frac{dt}{t^n}\stackrel{c}{=}\frac{-1}{(n-1)t^{n-1}}\stackrel{c}{=}\frac{-1}{(n-1)(x^2+px+q)^{n-1}}.$$

Druhý integrál v rovnici (5) se pokusíme převést na integrál $\displaystyle\int \frac{1}{(t^2+1)^n}\,dt$, který jsme již vypočetli v příkladu 3. To provedeme tak, že první dva členy trojčlenu $x^2+px+q$ doplníme na čtverec, píšeme

$$x^2+px+q=\left(x^2+2\frac{p}{2}+\frac{p^2}{4}\right)-\frac{p^2}{4}+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q,$$

potom zvolíme substituci $y=x+\frac{p}{2}$, $dy=dx$ a

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n}\stackrel{c}{=}\int \frac{dy}{\left(y^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^n}.$$

Zvolíme-li dále substituci $t\sqrt{-\frac{p^2}{4}+q}=y$ (výraz pod odmocninou je kladný, protože rovnice $x^2+px+q$ nemá reálné kořeny), dostaneme ve jmenovateli

$$\left(y^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^n=\left(\left(-\frac{p^2}{4}+q\right)t^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^n=\left(-\frac{p^2}{4}+q\right)^n\left(t^2+1\right)^n$$

dále $dt\sqrt{-\frac{p^2}{4}+q} = dy$ a

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} \overset{c}{=} \int \frac{dy}{\left(y^2-\frac{p^2}{4}+q\right)^n} \overset{c}{=} \frac{1}{\left(-\frac{p^2}{4}+q\right)^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^n}.$$

Integrál na pravé straně jsme ale již spočítali v příkladu 3 a tedy umíme spočítat i integrál (5).

**Příklad 13. Spočtěme integrál** $\displaystyle\int \frac{5x^6-x^5+24x^2-9x+9}{x^3(x^2+3)^2}\,dx$. Nejprve najdeme rozklad integrandu na parciální zlomky

$$\int \frac{5x^6-x^5+24x^2-9x+9}{x^3(x^2+3)^2}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{x^3}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{2}{x}\,dx + \int \frac{-22x+6}{(x^2+3)^2}\,dx + \int \frac{3x}{x^2+3}\,dx. \tag{6}$$

Nejobtížnější je výpočet integrálu ze čtvrtého sčítance. Nejprve ho rozložíme na součet dvou jednodušších integrálů tak, aby čitatel prvního integrálu byl násobkem derivace funkce $x^2+3$ a druhý čitatel aby obsahoval pouze konstantu

$$\int \frac{-22x+6}{(x^2+3)^2}\,dx = -11\int \frac{2x}{(x^2+3)^2}\,dx + 6\int \frac{dx}{(x^2+3)^2}. \tag{7}$$

První integrál vypočteme pomocí substituce $z = x^2+3$ ($dz = 2x\,dx$) a druhý pomocí substituce $x = \sqrt{3}t$ ($dx = \sqrt{3}\,dt$) převedeme na rekurentní vzorec (1)

$$-11\int \frac{2x}{(x^2+3)^2}\,dx = -11\int \frac{dz}{z^2} \overset{c}{=} \frac{11}{z} \overset{c}{=} \frac{11}{x^2+3}.$$

$$6\int \frac{dx}{(x^2+3)^2} \overset{c}{=} 6\int \frac{\sqrt{3}\,dt}{(3t^2+3)^2} \overset{c}{=} \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

A podle rekurentního vzorce (1) máme

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dx \overset{c}{=} \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t$$

a po dosazení do rovnice (7) dostaneme

$$\int \frac{-22x+6}{(x^2+3)^2}\,dx \overset{c}{=} \frac{11}{x^2+3} + \frac{x}{x^2+3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,x}{3}. \tag{8}$$

Integrál pátého sčítance z (6) vypočteme podobně jako předchozí integrál pomocí substituce $z = x^2 + 3$ ($dz = 2x\,dx$) obdržíme

$$\int \frac{3x}{x^2+3}\,dx \stackrel{c}{=} \frac{3}{2}\int \frac{dz}{z}\,dz \stackrel{c}{=} \frac{3}{2}\ln|z| \stackrel{c}{=} \frac{3}{2}\ln|x^2+3|.$$

Integrály první tří sčítanců z (6) jsou jednoduché, takže dosadíme výsledek předchozí integrace a vztah (8) můžeme rovnou psát

$$\int \frac{5x^6 - x^5 + 24x^2 - 9x + 9}{x^3(x^2+3)^2}\,dx \stackrel{c}{=} 2\ln|x| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$$

$$+\frac{11}{x^2+3} + \frac{x}{x^2+3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}\,x}{3} + \frac{3}{2}\ln|x^2+3|,$$

na každém intervalu, který neobsahuje bod $x = 0$.

**Integrál typu**

$$\int \mathbf{R}\left(\cos\mathbf{x}, \sin\mathbf{x}\right)\,\mathbf{dx}.$$

Zde k cíli vždy vede substituce

$$\operatorname{tg}\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} = \mathbf{t} \qquad \text{pro } \mathbf{x} \in (-\pi, \pi). \tag{9}$$

Potom užitím základních vztahů mezi trigonometrickými funkcemi dostaneme

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Tedy celkem máme vzorce

$$\sin\mathbf{x} = \frac{\mathbf{2t}}{\mathbf{1}+\mathbf{t^2}}, \qquad \cos\mathbf{x} = \frac{\mathbf{1}-\mathbf{t^2}}{\mathbf{1}+\mathbf{t^2}}, \qquad \mathbf{dx} = \frac{\mathbf{2\,dt}}{\mathbf{1}+\mathbf{t^2}}. \tag{10}$$

**Příklad 14. Spočtěme integrál** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx$. Použitím substituce (9) a vztahů (10) máme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{1+\cos x}\,dx = \int_{\operatorname{tg}0}^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} \frac{1-\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2\,dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{1+t^2-2t}{1+t^2+1-t^2}\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1+t^2-2t}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 1 - \frac{2t}{1+t^2}\,dt = \left[t - \ln(1+t^2)\right]_0^1 = 1 - \ln 2.$$

**Příklad 15. Spočtěme integrál** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx$. Použijeme substituci $\sqrt{2x+3}=t$, $t>0$, $2x+3=t^2$, $x=\dfrac{t^2-3}{2}$. Potom $dx=t\,dt$, a

$$\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}-x}\,dx = \int_{\sqrt{-2+3}}^{\sqrt{2+3}} \frac{t+\frac{t^2-3}{2}}{t-\frac{t^2-3}{2}} t\,dt = \int_{1}^{\sqrt{5}} \frac{2t^2+t^3-3t}{2t-t^2+3}\,dt$$

po rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$= \int_{1}^{\sqrt{5}} \left(-t-4-\frac{9}{t-3}+\frac{1}{t+1}\right) dt = \left[-\frac{t^2}{2}-4t-9\ln|t-3|+\ln|t+1|\right]_1^{\sqrt{5}}$$

$$= -\frac{5}{2}-4\sqrt{5}-9\ln(3-\sqrt{5})+\ln(\sqrt{5}+1)+\frac{1}{2}+4+9\ln 2-\ln 2$$
$$= 2-4\sqrt{5}-9\ln(3-\sqrt{5})+\ln(\sqrt{5}+1)+8\ln 2.$$

**Integrál typu**

$$\int \frac{\mathbf{P_n(x)\,dx}}{\sqrt{\mathbf{px^2+rx+s}}},$$

kde $P_n$ je polynom $n$-tého stupně. Potom na intervalu, kde platí $px^2+rx+s>0$, můžeme použít tzv. Ostrogradského vzorce:

$$\int \frac{\mathbf{P_n(x)\,dx}}{\sqrt{\mathbf{px^2+rx+s}}} = \mathbf{Q_{n-1}(x)}\sqrt{\mathbf{px^2+rx+s}} + \int \frac{\mathbf{k\,dx}}{\sqrt{\mathbf{px^2+rx+s}}}, \tag{11}$$

kde $Q_{n-1}$ je polynom $(n-1)$-ního stupně a $k$ je konstanta. Polynom $Q_{n-1}$ a konstantu $k$ určíme ze vztahu

$$\mathbf{P_n(x) = Q'_{n-1}(x)(px^2+rx+s) + \frac{1}{2}Q_{n-1}(x)(2px+r)+k} \tag{12}$$

metodou neurčitých koeficientů. Ostrogradského vzorec dostaneme, vydělíme-li rovnici (12) výrazem $\sqrt{px^2+rx+s}$ a následně ji zintegrujeme.

**Příklad 16. Spočtěme integrál** $\displaystyle\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$**, pro** $|x|<1$. Dosadíme-li $n=4$, $P_4(x)=x^4$, $Q_3=ax^3+bx^2+cx+d$, $p=-1$, $r=0$ a $s=1$ do vztahu (12), máme

$$x^4 = (3ax^2+2bx+c)(1-x^2)-(ax^3+bx^2+cx+d)x+k$$

a porovnáním koeficientů u stejných mocnin dostaneme

$$c+k=0, \quad 2b-d=0, \quad 3a-c-c=0, \quad -2b-b=0, \quad -3a-a=1$$

a tedy

$$a = -\frac{1}{4}, \qquad b = 0, \qquad c = -\frac{3}{8} \qquad d = 0, \qquad k = \frac{3}{8}.$$

Dosazením $Q_3 = -\frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x = -\frac{1}{8}(2x^3 + 3)$ a $k = \frac{3}{8}$ do Ostrogradského vzorce (11) obdržíme

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{8}(2x^3+3)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \stackrel{c}{=} -\frac{1}{8}(2x^3+3)\sqrt{1-x^2} + \frac{3}{8}\arcsin x.$$

**Příklad 17. Spočtěme integrál** $\displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}}$. Nejprve určíme definiční obor odmocniny. Kořeny polynomu pod odmocninou jsou $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$ a odmocnina má smysl pro $x \geq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ a pro $x \leq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Použijeme Eulerovu substituci $\sqrt{x^2+x-1} = -x+t$. (tedy $x + \sqrt{x^2+x-1} = t$.) Umocněním dostaneme $x^2+x-1 = x^2-2xt+t^2$ (tj. $x+2xt = t^2+1$.) Potom

$$x = \frac{t^2+1}{1+2t}, \qquad dx = \frac{2t(1+2t)-(t^2+1)2}{(1+2t)^2} = \frac{2t^2+2t-2}{(1+2t)^2}dt,$$

$$\text{a} \qquad \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x-1}} \stackrel{c}{=} \int \frac{2t^2+2t-2}{t(1+2t)^2}dt.$$

Po rozkladu na parciální zlomky dostaneme

$$\stackrel{c}{=} \int \frac{-2}{t} + \frac{5}{1+2t} + \frac{5}{(1+2t)^2} \stackrel{c}{=} -2\ln|t| + 5\ln|1+2t| - \frac{5}{1+2t}$$

$$\stackrel{c}{=} -2\ln|x+\sqrt{x^2+x-1}| + \frac{5}{2}\ln|1+2x+2\sqrt{x^2+x-1}| - \frac{5}{2(1+2x+2\sqrt{x^2+x-1})}.$$

Vzorec platí na intervalech $x \in \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$ a $x \in \left(-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$.

**Příklad 18. Spočtěme integrál** $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$, **pro** $x \in (1,3)$. Protože

$$-x^2+4x-3 = -1(x-1)(x-3) = (x-1)(3-x),$$

je na intervalu $(1,3)$ $x-1>0$ a $3-x>0$. Můžeme tedy psát

$$\sqrt{-x^2+4x-3} = \sqrt{(x-1)(3-x)} = (x-1)\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}.$$

Použijeme substituci

$$\sqrt{\frac{3-x}{x-1}} = t, \qquad \frac{3-x}{x-1} = t^2.$$

Z poslední rovnice vyjádříme $x$

$$x = \frac{3+t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt.$$

Potom

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}} = \int \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \frac{dt}{\left(\frac{3+t^2}{1+t^2}-1\right)t}$$

$$= \int \frac{-4}{1+t^2} \frac{dt}{(3+t^2-1-t^2)} = -2\int \frac{dt}{1+t^2} \stackrel{c}{=} -2\mathrm{arctg}\, t \stackrel{c}{=} -2\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-1}}.$$