Cvičení 11

Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k úplnému trigonometrické systému na intervalu $[a, a+2l]$, kde $l > 0$ jsou dány předpisem

$$a_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(t)\cos\frac{n\pi t}{l}\,dt, \qquad n = 0, 1, 2, 3...$$
$$b_n = \frac{1}{l}\int_a^{a+2l} f(t)\sin\frac{n\pi t}{l}\,dt, \qquad n = 1, 2, 3, 4...$$

a Fourierův rozvoj funkce f je dán předpisem

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Nakonec zbývá rozhodnout, za jakých předpokladů tento rozvoj konverguje k funkci f. K tomu nám pomůže následující věta.

Věta 1. **(Dirichletovo-Jordanovo kritérium.)** *Je-li funkce f omezená a po částech monotónní na intervalu (a, b) a periodická s periodou T mající vlastní integrál na nějakém intervalu délky T, potom Fourierův rozvoj funkce f konverguje v každém bodě $x \in (a, b)$ a má zde součet $\dfrac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$.*

Je-li funkce f navíc spojitá na intervalu (a, b), potom Fourierův rozvoj funkce f konverguje stejnoměrně k funkci f v každém intervalu $[c, d] \subset (a, b)$.

Příklad 2. Najděte Fourierův rozvoj vzhledem k úplnému trigonometrické systému a určete obor (stejnoměrné) konvergence u následujících funkcí

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (0, \pi], \\ (x - k\pi)^2 & x \in (k\pi, (k+1)\pi],\ \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

  $\left(\dfrac{\pi^2}{3} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(2nx) - \frac{\pi}{n}\sin(2nx)\right),$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\pi, \pi], \\ (x - k\pi)^2 & x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi],\ \ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

  $\left(\dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)\right),$

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (0, \pi], \\ -x^2 & x \in (-\pi, 0] \end{cases}$

  a $f(x) := f(x - 2k\pi) \quad$ pro $x \in ((2k-1)\pi, (2k+1)\pi], \ k \in \mathbb{Z}$

  $$\left(\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}\pi^2}{n} + \frac{2\left((-1)^n - 1\right)}{n^3} \right) \sin(nx) \right).$$

Příklad 3. Najděte sinový rozvoj funkce $f(x) = x - x^2 \ x \in (0, 1)$.

$$\left(\frac{4}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin(n\pi x) \right)$$

Příklad 4. Najděte kosinový rozvoj funkce $f(x) = \sin(2x) \ x \in (0, 2\pi)$.

$$\left(\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{15 + 4n - 4n^2} \cos \frac{(2n-1)x}{2} \right)$$