Cvičení 3

Příklad 1. Nejjednodušší je separace proměnných, lze-li ji provést! Funkce xe^{x+y} je spojitá a tedy integrovatelná:

$$\int_0^1 \int_0^1 xe^{x+y}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 xe^x e^y\,dx\,dy = \int_0^1 e^y\,dy \int_0^1 xe^x\,dx = e - 1.$$

Příklad 2. Na pořadí integrace záleží! Funkce x^y je pro $x \geq 0$ a $y > 0$ spojitá a tedy integrovatelná:

$\displaystyle\int_0^1 \int_1^2 x^y\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x}\,dx \ldots$ jak dál? ... Zkusíme raději změnit pořadí integrace.

$\displaystyle\int_1^2 \int_0^1 x^y\,dx\,dy = \int_1^2 \frac{dy}{y+1} = \ln\frac{3}{2}.$

A tedy i $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2 - x}{\ln x}\,dx = \ln\frac{3}{2}.$

Příklad 3. Spočtěte integrál $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 xzu^2 \cos(yz)\,dx\,dy\,dz\,du.$ $\left(\dfrac{8}{3\pi}\right)$

Příklad 4. Integrujte funkci $x+y^2$ přes obdélník s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$, $[1,2]$, $[0,2]$. $\left(\dfrac{11}{3}\right)$

Příklad 5. Určete integrační meze oblasti určené
a) trojúhelníkem s vrcholy $[0,0]$, $[2,1]$, $[-2,1]$,
b) lichoběžníkem s vrcholy $[0,0]$, $[1,0]$, $[1,2]$, $[0,1]$.

a) Integrační oblast A je ohraničena přímkami $2y = x$, $2y = -x$, $y = 1$. Tedy

$$A:\ 0 \leq y \leq 1, \quad -2y \leq x \leq 2y,$$

nebo pomocí dvou oblastí A_1, A_2

$$A_1:\ 0 \leq x \leq 2, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 1, \qquad A_2:\ -2 \leq x \leq 0, \quad -\frac{x}{2} \leq y \leq 1.$$

b) Integrační oblast B je ohraničena přímkami $y = 0$, $x = 1$, $y = x + 1$, $x = 0$. Tedy

$$B:\ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq x + 1,$$

nebo pomocí dvou oblastí B_1, B_2

$$B_1:\ 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \qquad B_2:\ 1 \leq y \leq 2, \quad y - 1 \leq x \leq 1.$$

V případě, že máme zadány křivky ohraničující integrační oblast, určíme nejprve průsečíky křivek a poté oblast rozdělíme na jednotlivé podoblasti tak, aby v každé podoblasti byla horní (dolní) mez popsána jedinou funkcí.

Příklad 6. Integrujte funkci xy^2 přes oblast ohraničenou nerovnicemi $0 \leq x \leq 1$ a $x^2 \leq y \leq x$.

$$\left(\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 \, dy \, dx = \frac{1}{40}\right)$$

Ještě si ukážeme, jak v tomto případě změnit pořadí integrace. Hranice je popsána rovnicemi $y = x$ a $y = x^2$, nebo též rovnicemi $x = y$ a $x = \sqrt{y}$ (nalezli jsme tedy inverzní funkce původních hranic). Souřadnice průsečíků jsou $[0, 0]$ a $[1, 1]$. Oblast tedy můžeme ekvivalentně popsat nerovnicemi $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x \leq \sqrt{y}$ a tedy

$$\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 \, dy \, dx = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} xy^2 \, dx \, dy.$$

Příklad 7. Určete obsah obrazce ohraničeného obloukem hyperboly $xy = a^2$ a přímkou $2x + 2y = 5a$, kde $a > 0$.

$$\left(\int_{a/2}^{2a} \int_{a^2/x}^{5a/2-x} dy \, dx = a^2 \left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2\right)\right)$$

Příklad 8. Vypočtěte oba dvojnásobné integrály funkce $x^2 + 2y^2$ přes oblast ohraničenou nerovnicemi $0 \leq x \leq 2$ a $-1 \leq y \leq 1$. (8)

Příklad 9. Vypočtěte oba dvojnásobné integrály funkce $\dfrac{1}{(2x + y + 1)^2}$ přes oblast ohraničenou nerovnicemi $0 \leq x \leq 4$ a $0 \leq y \leq 1$. $\left(\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{9}{5}\right)$

Příklad 10. Vypočtěte oba dvojnásobné integrály funkce $f(x, y) = \dfrac{x - y}{(x + y)^3}$ na čtverci $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dy \, dx = \frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x - y}{(x + y)^3} \, dx \, dy = -\frac{1}{2}\right)$$

Vidíme, že jsme dostali různé hodnoty. Integrovaná funkce totiž není omezená v okolí bodu $[0, 0]$, a není tedy na zadané oblasti integrovatelná!