Cvičení 5

Jednoduchou (neprotínající se) konečnou po částech hladkou křivkou k rozumíme množinu bodů $[x, y, z]$ v prostoru xyz, daných parametricky rovnicemi

$$x = \varphi(t) \qquad y = \psi(t) \qquad z = \chi(t) \qquad t \in [a, b].$$

Pokud bude křivka orientovaná a bude hranicí oblasti Ω, řekneme, že je kladně orientovaná vzhledem k Ω, jestliže Ω zůstává po levé straně, probíháme-li k ve smyslu dané orientace (t probíhá od a do b). Rovinnou křivku dostaneme pro $z = 0$.

Nechť je dána rovinná křivka k a funkce $f(x, y)$. Rozdělíme-li křivku k dělícími body A_1, A_2, …, A_{n-1} (toto dělení označíme D_n) s parametry $t_0 = a, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = b$ na n oblouků $o_1, o_2, \dots, o_{n-1}$. Na každém oblouku o_i zvolme libovolně bod $C_i = [\xi_i, \eta_i]$ a sestrojme součty

$$S_x = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})), \tag{1}$$

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(y_i - y_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(\psi(t_i) - \psi(t_{i-1})), \tag{2}$$

$$S_s = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)(s_i - s_{i-1}), \qquad \text{kde } s_i - s_{i-1} = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt. \tag{3}$$

Označme $l_k = \displaystyle\int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt$ délku oblouku o_k a $v(D_n) = \max\limits_k l_k$ normu dělení D_n. Existují-li čísla I_x (I_y, I_s) tak, že k libovolnému $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ tak, že

$$|I_x - S_x| < \varepsilon, \qquad (|I_y - S_y| < \varepsilon, \qquad |I_s - S_s| < \varepsilon) \tag{4}$$

pro každé dělení D_n, pro něž $v(D_n) < \delta$, a to nezávisle na volbě bodů C_k, říkáme, že existuje křivkový integrál z funkce $f(x, y)$ po orientované křivce k vzhledem k x (k y, k s), a píšeme

$$I_x = \int_k f(x, y)\, dx, \qquad \left(I_y = \int_k f(x, y)\, dy, \qquad I_s = \int_k f(x, y)\, ds \right). \tag{5}$$

První dva integrály budeme nazývat křivkovými integrály druhého druhu a třetí z nich křivkovým integrálem prvního druhu.

Geometrický význam: I_s je obsah plochy pod grafem funkce $f(x, y)$ na křivce k. I_x je obsah orientovaného průmětu této plochy do roviny xz. I_y je obsah orientovaného průmětu této plochy do roviny yz.

Obdobně jako jsme zavedli křivkové integrály pro rovinné křivky můžeme zavést i křivkové integrály pro prostorové křivky. Nakonec uvedeme důležitou větu, která nám dá návod, jak počítat křivkové integrály.

Věta 1. *Je-li $f(x,y)$ spojitá na křivce k, pak křivkové integrály (5) existují a platí:*

$$I_x = \int_k f(x,y)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)\,dt,$$

$$I_y = \int_k f(x,y)\,dy = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\,dt,$$

$$I_s = \int_k f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Příklad 2. Zopakujte si, jak převést explicitně zadanou křivku na její parametrické vyjádření a jak odvodit parametrické vyjádření křivky z křivky popsané vztahem mezi polárními souřadnicemi. Rozmyslete si, jak se v jednotlivých křivkových integrálech projeví změna orientace křivky. Dále si odvoďte vzorce pro případ, kdy se křivka skládá ze dvou oblouků a pro případ, kdy funkce $f(x,y)$ je součtem dvou funkcí.

Příklad 3. Vypočtěte křivkový integrál prvního druhu $I_s = \displaystyle\int_C y\,ds$, kde C je oblouk paraboly $y^2 = 2px$ od bodu $[0,0]$ do bodu $[x_0, y_0]$ ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$). $\left(\dfrac{\sqrt{(y_0^2+p^2)^3}-p^3}{3p}\right)$

Příklad 4. Vypočtěte křivkový integrál prvního druhu $I_s = \displaystyle\int_C y^2\,ds$, kde C je oblouk cykloidy $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t) = 2a\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$, $2\pi \geq t \geq 0$. $\left(\dfrac{256a^3}{15}\right)$

Příklad 5. Vypočtěte křivkový integrál prvního druhu $I_s = \displaystyle\int_C xy\,ds$, kde C je čtvrtina elipsy ležící v prvním kvadrantu.

$$\left(I_s = \int_0^{\pi/2} ab\sin t\cos t\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}\right)$$

Příklad 6. Vypočtěte křivkový integrál prvního druhu $I_s = \displaystyle\int_C |y|\,ds$, kde C je lemniskáta $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, $a > 0$. $\big(2a^2(2-\sqrt{2})\big)$

Příklad 7. Vypočtěte křivkový integrál $\displaystyle\int_C \big((x^2-2xy)\,dx + (y^2-2xy)\,dy\big)$, kde C je parabola $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$. Křivka je orientována ve směru růstu proměnné x. $\left(-\dfrac{14}{15}\right)$

Příklad 8. Vypočtěte křivkový integrál $\int_C ((x+y)\,dx + (x-y)\,dy)$, kde C je kladné orientovaná elipsa. (0)

Příklad 9. Vypočtěte křivkový integrál $\int_C \left(y^2\,dx + x^2\,dy\right)$, kde C je horní polovina elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bod $[a,0]$ je počátečním bodem a bod $[-a,0]$ koncovým bodem křivky. $\left(\frac{4ab^2}{3}\right)$

Příklad 10. Je dán trojúhelník s vrcholy $[-1,0]$, $[0,2]$, $[2,0]$. Obvod tohoto trojúhelníku tvoří křivku C. Křivka probíhá body v uvedeném pořadí. Spočtěte integrál

$$\oint_C (2x\,dx - (x+2y)\,dy)\,. \qquad (3)$$