# Cvičení 6 a 7

**Příklad 1.** Vypočtěte křivkový integrál prvního druhu $I_s = \int_C x^2\, ds$, kde $C$ je kružnice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$ a $x + y + z = 0$. $\left(\dfrac{2\pi a^3}{3}\right)$

**Příklad 2.** Vypočtěte hmotnost oblouku $C$ parametricky zadané křivky $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ pro $t \in [0, t_0]$, jestliže délková hustota v každém bodě křivky je nepřímo úměrná druhé mocnině délky průvodiče $\left(\dfrac{k}{x^2 + y^2 + z^2}\right)$ a v bodě $[1, 0, 1]$ se rovná číslu 1. $\left(\sqrt{3}(1 - e^{-t_0})\right)$

**Definice 3.** **Křivkový integrál vektorového pole** definujeme předpisem

$$\int_C \vec{a}(x,y,z)\, d\vec{s} = \int_C \vec{a}(x,y,z)\, \vec{t}(x,y,z)\, ds = \int_C (a_1\, dx + a_2\, dy + a_3\, dz)\,,$$

kde $d\vec{s}$ je definováno předpisem $d\vec{s} = \vec{t}\, ds$. $s$ je parametr délky oblouku a $\vec{t}$ je jednotkový tečný vektor v uvažovaném bodě křivky.

**Věta 4.** **(Greenova věta.)** *Nechť $A$ je uzavřená množina, jejíž hranicí je kladně orientovaná, jednoduchá, uzavřená a po částech hladká křivka $C$. Jsou-li funkce $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\dfrac{dP}{dy}$, $\dfrac{dQ}{dx}$ spojité na množině $A$, potom platí*

$$\int\int_A \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx\, dy = \oint_C (P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy)\,.$$

**Příklad 5.** Pomocí Greenovy věty transformujte křivkový integrál

$$\oint_C \left(\sqrt{(x^2 + y^2)}\, dx + (xy^2 + y \ln(x + \sqrt{(x^2 + y^2)}))\, dy\right),$$

kde $C$ splňuje předpoklady Greenovy věty. $\left(\int\int_A y^2\, dx\, dy\right)$

**Příklad 6.** Vypočtěte křivkový integrál $\oint_C \left(2(x^2 + y^2)\, dx + (y + x)^2\, dy\right)$, kde $C$ je křivka tvořící obvod trojúhelníka s kladnou orientací a vrcholy $[1, 1]$, $[2, 2]$, $[1, 3]$.
$\left(2 \int_1^2 \int_x^{4-x} (x - y)\, dy\, dx = -\dfrac{4}{3}\right)$

**Příklad 7.** Vypočtěte křivkový integrál $\oint_C \frac{dx - dy}{x + y}$, kde $C$ je křivka tvořící obvod čtverce s kladnou orientací a vrcholy $[1, 0]$, $[0, 1]$, $[-1, 0]$, $[0, -1]$. $(-4)$

**Příklad 8.** Vypočtěte křivkový integrál $\oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, kde $C$ je křivka tvořící obvod čtverce s kladnou orientací a vrcholy $[1, 0]$, $[0, 1]$, $[-1, 0]$, $[0, -1]$. $(0)$

**Definice 9.** Je-li vektor $\vec{a}(t)$ funkcí proměnné $t$,

$$\vec{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t)),$$

pak tento vektor nazýváme **vektorovou funkcí** nebo také **vektorovým polem**.

**Poznámka 10.** Derivace vektorové funkce $\vec{a}(t)$

$$\left(\vec{a}(t)\right)' = \frac{d\,\vec{a}(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{\vec{a}(t+h) - \vec{a}(t)}{h} = (a_1'(t), a_2'(t), a_3'(t)).$$

A existují-li derivace vektorových funkcí $\vec{a}(t)$ a $\vec{b}(t)$, platí

$$\left(\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)\right)' = \left(\vec{a}(t)\right)' \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \left(\vec{b}(t)\right)',$$

$$\left(\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)\right)' = \left(\vec{a}(t)\right)' \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \left(\vec{b}(t)\right)'.$$

**Definice 11.** Funkcí $u = f(x, y, z)$ je dáno v oblasti $\Omega$, na níž je definována, tzv. **skalární pole**. Plochy $u =$konstanta jsou **hladiny** tohoto skalárního pole. Vektor

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

se nazývá **gradient** daného skalárního pole. Gradient skalárního pole v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ je tedy vektor. Tento vektor je kolmý k hladině procházející bodem $[x_0, y_0, z_0]$.

**Definice 12.** Je-li v oblasti $\Omega$ dáno vektorové pole $\vec{a}(x, y, z)$ a lze-li najít takové skalární pole $u = f(x, y, z)$, že v oblasti $\Omega$ platí

$$\vec{a}(x, y, z) = \operatorname{grad} u \quad \left(= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right),$$

pak toto vektorové pole nazýváme **potenciální** a skalární pole $u = f(x, y, z)$ nazýváme **potenciálem** vektorového pole.

**Poznámka 13.** Skalární pole $F$ lze považovat za plochu. Je-li $[x_0, y_0, z_0]$ bod, pro který platí $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Pak rovnice **tečné roviny** k této ploše v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ je

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0,$$

a **normála** k této ploše má rovnici

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}.$$

**Definice 14.** Je-li v oblasti $\Omega$ dáno vektorové pole $\vec{a}(x, y, z)$, potom **divergencí** vektorového pole nazýváme

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

**Poznámka 15.** Uvažujme stacionární proudění kapaliny, charakterizované vektorem rychlosti $\vec{a}(x, y, z)$. Divergence vektoru $\vec{a}(x, y, z)$, znamená objemové množství kapaliny, které vyteče z jednotkového objemu za jednotku času (vydatnost zřídla). Vektorové pole s divergencí rovnou nule nazýváme nezřídlové (stejné množství nateče jako vyteče).

**Definice 16.** Je-li v oblasti $\Omega$ dáno vektorové pole $\vec{a}(x, y, z)$, potom **rotací** vektorového pole nazýváme

$$\text{rot } \vec{a} = \text{curl } \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}.$$

**Poznámka 17.** Je-li $\vec{a}(x, y, z)$ rychlost proudění kapaliny, potom rotace vyznačuje směr osy, kolem které se kapalina v okolí uvažovaného bodu otáčí. (Délka vektoru rot $\vec{a}$ odpovídá dvojnásobku rotační rychlosti v obloukové míře.) Vektorové pole, kde všude platí rot $\vec{a} = 0$, se nazývá nevírové.

**Definice 18.** Oblast $\Omega \subset E_3$ se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže ke každé jednoduché uzavřené po částech hladké křivce $C$ v oblasti $\Omega$ existuje jednoduchá po částech hladká plocha $S$ (ležící celá v oblasti $\Omega$), jejímž okrajem je křivka $C$. (Oblast $\Omega \subset E_2$ se nazývá jednoduše souvislá, jestliže vnitřní oblast každé jednoduché uzavřené po částech hladké křivky $C$ v oblasti $\Omega$ je částí oblasti $\Omega$.)

**Věta 19.** *Je-li $\Omega \subset E_3$ jednoduše souvislá oblast a je-li* $\operatorname{rot} \vec{a} = 0$ *na oblasti $\Omega$, potom je vektorové pole $\vec{a}$ na oblasti $\Omega$ potenciální.*

**Věta 20. (Nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě.)** *Je-li v oblasti $\Omega$ $\vec{a}(x,y,z) = \operatorname{grad} u$ a leží-li po částech hladká křivka $C$ s počátečním bodem $A$ a koncovým bodem $B$ v oblasti $\Omega$, potom platí*

$$\int_C \vec{a}(x,y,z)\, d\vec{s} = u(B) - u(A).$$

**Příklad 21.** Přesvědčete se, že zadaná vektorová pole jsou potenciální. Pokud ano, spočtěte jejich potenciál $u$. (Totální diferenciál $du = a_1\,dx + a_2\,dy + a_3\,dz$.)

- $\vec{a}(x,y) = (3x^2y - 1, x^3 - 1) \qquad (x^3y - x - y + K)$,
- $\vec{a}(x,y) = (e^{xy}y + 5y, e^{xy}x + 5x) \qquad (e^{xy} + 5xy + K)$,
- $\vec{a}(x,y) = (2x - 3y^2 + 1, 2 - 6xy) \qquad (x^2 + x + 2y - 3xy^2 + K)$,
- $\vec{a}(x,y) = (x^2 - y^2, 5 - 2xy) \qquad \left(\frac{x^3}{3} - xy^2 + 5y + K\right)$,
- $\vec{a}(x,y,z) = (yz, xz, xy) \qquad (xyz + K)$,

kde $K$ je konstanta. Dále si zvolte křivku $C$ a spočítejte příslušné křivkové integrály jednak podle definice a jednak podle věty o nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě.

**Příklad 22.** Spočtěte:

- $|\operatorname{grad}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)\,(2,1,1)| \qquad \left(3\sqrt{11}\right)$,
- $\operatorname{div}(u\vec{a}) \qquad \left(u \operatorname{div}\vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} u\right)$,
- $\operatorname{rot}(y^2z, z^2x, x^2y) \qquad ((x^2 - 2xz, y^2 - 2xy, z^2 - 2yz))$,
- $\operatorname{rot}\left((\vec{r} \cdot \vec{a})\, \vec{b}\right)$, kde $\vec{a}, \vec{b}$ jsou konstantní vektory a $\vec{r} = (x,y,z)$ je polohový vektor $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$.