Cvičení 8

Věta 1. *Jestliže S je jednoduchá hladká plocha, $f(x,y,z)$ je spojitá funkce na ploše S a $P(u,v)$ je parametrizace plochy S, definovaná na množině $B \subseteq E_2$, pak $\iint_S f(x,y,z)\,dS$ existuje a platí*

$$\iint_S f(x,y,z)\,dS = \iint_B f(P(u,v)) \left| \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} \right| du\,dv.$$

Příklad 2. Vypočtěte $\iint_S 2x + \frac{4}{3}y + z\,dS$, kde S je část roviny $\vec{r}(u,v) = \left(u, v, 4 - 2u - \frac{4v}{3}\right)$ a $0 \le u \le 2$, $0 \le v \le 3 - \frac{3u}{2}$. $\left(4\sqrt{61}\right)$

Příklad 3. Vypočtěte $\iint_S xyz\,dS$, kde S je část roviny $x + y + z = 1$ ležící v prvním oktantu. $\left(\frac{\sqrt{3}}{120}\right)$

Příklad 4. Vypočtěte $\iint_S x\,dS$, kde S je část kulové plochy v prvním oktantu se středem v počátku a poloměrem R. $\left(\frac{\pi R^3}{4}\right)$

Příklad 5. Vypočtěte $\iint_S x^2y^2\,dS$, kde S je horní polovina kulové plochy se středem v počátku a poloměrem R. $\left(\frac{2\pi R^6}{15}\right)$

Příklad 6. Vypočtěte $\iint_S z^2\,dS$, kde S je část kuželové plochy $x = r\cos\varphi\sin\psi$, $y = r\sin\varphi\sin\psi$, $z = r\cos\psi$, $0 \le r \le a$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, ψ je konstantní úhel z intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
$\left(\frac{\pi a^4}{2}\sin\psi\cos^2\psi\right)$

Příklad 7. S je část hyperbolického paraboloidu $z = xy$, ohraničená válcovou plochou $x^2 + y^2 = R^2$ a r je vzdálenost bodu hyperbolického paraboloidu od osy z. Dokažte, že platí

$$\iint_S \frac{dS}{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^R \sqrt{1+r^2}\,dr\,d\varphi.$$

Věta 8. *Plošný integrál druhého druhu (tok vektorového pole $\vec{f}$ plochou S.) lze převést na plošný integrál prvního druhu:*

$$\iint_S (f_1(x,y,z)\,dy\,dz + f_2(x,y,z)\,dx\,dz + f_3(x,y,z)\,dx\,dy) = \iint_S \vec{f}\; d\vec{S} = \iint_S \vec{f}\cdot\vec{n}\; dS.$$

($\vec{n}$ je jednotková normála.)

Příklad 9. Vypočtěte $\iint_S (x,y,z)\,d\vec{S}$, kde S je kruh ležící v rovině $x+y+z=a$, ohraničený kružnicí, která je průsečnou křivkou dané roviny a kulové plochy $x^2+y^2+z^2=a^2$, a orientovaný tak, aby jednotkový normálový vektor svíral s vektorem $(0,0,1)$ ostrý úhel. $\left(\dfrac{2\pi a^3\sqrt{3}}{9}\right)$

Příklad 10. Vypočtěte $\iint_S x^2y^2z\,dx\,dy$, kde S je část kulové plochy $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z\le 0$, orientovanou tak, aby jednotkový normálový vektor svíral s vektorem $(0,0,1)$ ostrý úhel. $\left(-\dfrac{2\pi a^7}{105}\right)$

Věta 11. (Gauss-Ostrogradského) *Nechť S je uzavřená, jednoduchá, po částech hladká plocha, orientovaná normálovým vektorem vně. Nechť A je vnitřek S (včetně hranice). Nechť $\vec{f}$ a $\operatorname{div}\vec{f}$ jsou spojité na množině A. Potom*

$$\iiint_A \operatorname{div}\vec{f}\; dx\,dy\,dz = \iint_S \vec{f}\; d\vec{S}\,.$$

Tedy objem $V = \dfrac{1}{3}\iint_S (x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy)\,.$

Věta 12. (Stokesova) *Nechť S je jednoduchá, po částech hladká plocha a C její okraj souhlasně orientovaný s plochou S. Nechť $\vec{f}$ je spojitá včetně derivací na množině $\Omega\subset E_3$ obsahující plochu S. Potom*

$$\int_C \vec{f}\; d\vec{s} = \iint_S \operatorname{rot}\vec{f}\; d\vec{S}\,.$$

Příklad 13. Spočtěte křivkový integrál $\int_C (y,z,x)\,d\vec{s}$, kde C je kružnice $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x+y+z=0$ orientovaná tak, že ze směru vektoru $(1,0,0)$ se oběh po křivce jeví proti směru otáčení hodinových ručiček. $\left(-\pi a^2\sqrt{3}\right)$

Příklad 14. Vypočtěte $\iint_S (x^2, y^2, z^2)\, d\vec{S}$, kde S je vně orientovaný povrch krychle $[0,a] \times [0,a] \times [0,a]$. $\left(3a^4\right)$

Příklad 15. Vypočtěte křivkový integrál $\oint_C \big((x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy + (z^2 - xy)\, dz\big)$, kde C je křivka tvořící obvod trojúhelníka s kladnou orientací a vrcholy $[0,0,1]$, $[0,1,0]$, $[1,0,0]$. (0)

Příklad 16. Vypočtěte tok vektorového pole (x^3, y^3, z^3) vně orientovanou kulovou plochou $S\colon x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. $\left(\dfrac{12\pi R^5}{5}\right)$