Cvičení 9

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ 0 & x = 0, \\ -1 & x < 0. \end{cases}$$

Vidíme tedy, že posloupnost spojitých funkcí konverguje k nespojité funkci. To nás přivádí k silnějšímu pojmu konvergence.

Definice 1. Řekneme, že posloupnost funkcí $\{f_n(x)\}$ konverguje stejnoměrně k funkci $f(x)$ v intervalu M, jestliže

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall x \in M,\ \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Věta 2. *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergentní a* $|f_n(x)| \leq a_n$ *pro* $\forall n \in \mathbb{N}$ *a* $\forall x \in M$*, potom řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *konverguje stejnoměrně pro* $\forall x \in M$.

Důležitost pojmu stejnoměrné konvergence spočívá v tom, že přenáší spojitost, existenci derivace a existenci primitivní funkce na limitu.

Věta 3. *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *stejnoměrně konvergentní a jsou-li funkce* $f_n(x)$ *spojité pro* $\forall x \in M$*, potom je i součet řady spojitá funkce pro* $\forall x \in M$.

Věta 4. *Mají-li funkce* $f_n(x)$ *v otevřeném, omezeném intervalu* M *derivace, je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *stejnoměrně konvergentní alespoň v jednom bodě intervalu* M *a je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ *stejnoměrně konvergentní v intervalu* M*, potom je i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *stejnoměrně konvergentní v intervalu* M *a její součet má v intervalu* M *(vlastní) derivaci rovnou součtu řady* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$

Věta 5. *Mají-li funkce* $f_n(x)$ *v otevřeném, omezeném intervalu* M *primitivní funkce* $F_n(x)$, *které zvolíme tak, aby řada* $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ *byla stejnoměrně konvergentní alespoň v jednom bodě intervalu* M *a je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *stejnoměrně konvergentní v intervalu* M, *potom je i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(x)$ *stejnoměrně konvergentní v intervalu* M *a její součet je v intervalu* M *primitivní funkcí k součtu řady* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

Věta 6. *Je-li* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *mocninná řada a existuje-li* $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *potom tato řada má poloměr konvergence* R, *kde* $R = \begin{cases} 1/q & \text{pro } 0 < q < \infty, \\ 0 & \text{pro } q = \infty, \\ \infty & \text{pro } q = 0. \end{cases}$ *Tedy konverguje absolutně pro* $|x - x_0| < R$ *a diverguje pro* $|x - x_0| > R$ *(v krajních bodech* $|x - x_0| = R$ *musíme rozhodnout zvlášť).*

Věta 7. *Je-li* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *mocninná řada,* $s(x)$ *její součet a* R *je její poloměr konvergence, potom platí:*

- $\forall r < R$ *konverguje řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *stejnoměrně pro* $|x - x_0| \leq r$,
- $s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}$ *pro* $|x - x_0| < R$ *a poloměr konvergence je opět* R,
- $\int s(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n}(x - x_0)^{n+1}$ *pro* $|x - x_0| < R$ *a poloměr konvergence je opět* R.

Příklad 8. Určete obor (stejnoměrné) konvergence řady

- $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n \quad (-1, 1)\,,$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{2n-1} \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \quad (-\infty, \infty)$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}} \quad (0, \infty)$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2} \quad [-9, -7]$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{(2n-1)!!} \quad (-2, 2)$.

Příklad 9. Pomocí derivování a integrování mocninné řady určete její součet

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad ([-1, 1), \ = \operatorname{arctg} x \text{ pro } |x| < 1)$,
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \left([-1, 1), \ = -\int_0^x \frac{ln(1-t)}{t}\, dt \text{ pro } |x| < 1\right)$.