

Matematika 1A.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

31. 10. 2016

Geometrické aplikace

Věta

Nechť f je funkce spojitá na intervalu I . Má-li funkce f ve všech vnitřních bodech

intervalu I $\left\{ \begin{array}{l} \text{kladnou} \\ \text{nezápornou} \\ \text{zápornou} \\ \text{nekladnou} \\ \text{nulovou} \end{array} \right\}$ derivaci, pak je funkce f na I $\left\{ \begin{array}{l} \text{rostoucí} \\ \text{neklesající} \\ \text{klesající} \\ \text{nerostoucí} \\ \text{konstantní} \end{array} \right\}$.

Příklad

Vyšetřete monotonii funkce $f(x) = 2x + \sin x$.

Geometrické aplikace

Věta 5.7 (l'Hospitalovo pravidlo)

Je-li $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty$ a je-li $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b$, pak $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = b$.

Poznámka

Věta platí i pro nevlastní limity, limity a nevlastní limity v nevlastních bodech, jednostranné limity a nevlastní jednostranné limity.

Příklad

Určete $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$.

Poznámka (triky na úpravu součinu, rozdílu a mocniny)

$$fg = \frac{f}{\frac{1}{g}} = \frac{g}{\frac{1}{f}}$$

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$$

$$fg = e^{g \ln f}$$

Lokální extrémy

Definice

Řekneme, že funkce f má v bodě a $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokální maximum} \\ \text{lokální minimum} \\ \text{globální maximum} \\ \text{globální minimum} \end{array} \right\}$, jestliže

$\left\{ \begin{array}{l} \text{existuje okolí } U \text{ bodu } a \text{ takové, že pro všechna } x \in U \text{ je } f(x) \leq f(a). \\ \text{existuje okolí } U \text{ bodu } a \text{ takové, že pro všechna } x \in U \text{ je } f(x) \geq f(a). \\ \text{pro všechna } x \in D(f) \text{ je } f(x) \leq f(a). \\ \text{pro všechna } x \in D(f) \text{ je } f(x) \geq f(a). \end{array} \right.$

Má-li funkce f v bodě a $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokální maximum nebo lokální minimum,} \\ \text{globální maximum nebo globální minimum,} \end{array} \right\}$

řekneme, že má v a $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokální extrém.} \\ \text{globální extrém.} \end{array} \right.$

Příklad

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^2$.

Lokální extrémy

Věta 6.1

Má-li funkce f v bodě a lokální extrém a má-li v bodě a derivaci, pak $f'(a) = 0$.

Definice

Body, v nichž má funkce derivaci rovnu nule, budeme nazývat jejími **stacionárními body**.

Příklad

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3$.

Lokální extrémy

Věta 6.2 (postačující podmínky pro lokální extrémy)

Nechť je funkce f spojitá v bodě a .

- a) Existuje-li okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x < a$, je $f'(x) \geq 0$ a pro všechna $x \in U$, $x > a$, je $f'(x) \leq 0$, pak má funkce f v bodě a lokální maximum.
- b) Existuje-li okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x < a$, je $f'(x) \leq 0$ a pro všechna $x \in U$, $x > a$, je $f'(x) \geq 0$, pak má funkce f v bodě a lokální minimum.
- c) Existuje-li okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f'(x) > 0$ nebo pro všechna $x \in U$, $x \neq a$, je $f'(x) < 0$, pak funkce f nemá v bodě a lokální extrém.

Příklad

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = |x^2 - 4|$.

Lokální extrémy

Věta 6.3

Má-li funkce f druhou derivaci ve svém stacionárním bodě a a je-li $\left\{ \begin{array}{l} f''(a) < 0, \\ f''(a) > 0, \end{array} \right\}$

pak má funkce f v bodě a $\left\{ \begin{array}{l} \text{lokální maximum.} \\ \text{lokální minimum.} \end{array} \right.$

Příklad

Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 28x$

Poznámka

Abychom našli body, v nichž má funkce globální extrémy, stačí vyšetřit všechny body, v nichž má lokální extrémy, a všechny hraniční body jejího definičního oboru.

Konvexnost, konkávnost a inflexe.

Definice

Má-li funkce f derivaci v bodě a , řekneme, že je $\left\{ \begin{array}{l} \text{v bodě } a \text{ konvexní,} \\ \text{v bodě } a \text{ konkávní,} \end{array} \right\}$ jestliže existuje okolí U bodu a takové, že pro všechna $x \in U, x \neq a$, je

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) > f'(a)(x - a) + f(a). \\ f(x) < f'(a)(x - a) + f(a). \end{array} \right.$$

Poznámka

Geometrický to znamená, že v nějakém okolí U bodu a probíhá graf konvexní funkce nad tečnou v bodě $A = [a, f(a)]$, graf konkávní funkce f pod tečnou v bodě $A = [a, f(a)]$.

Konvexnost, konkávnost a inflexe.

Definice

Má-li funkce f derivaci v bodě a , řekneme, že má v a **inflexi**, jestliže existuje okolí U bodu a takové, že

pro všechna $x \in U$, $x < a$, je $f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a)$

a pro všechna $x \in U$, $x > a$, je $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$

nebo pro všechna $x \in U$, $x < a$, je $f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$

a pro všechna $x \in U$, $x > a$, je $f(x) \leq f'(a)(x - a) + f(a)$.

Příklad Nalezněte inflexní body funkce

1) $f(x) = x^2$

2) $f(x) = x^3$

Věta 6.4 (postačující podmínka pro konvexnost a konkávnost)

Má-li funkce f druhou derivaci v bodě a a je-li $\left\{ \begin{array}{l} f''(a) > 0, \\ f''(a) < 0, \end{array} \right\}$ pak je funkce f v

bodě a $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvexní.} \\ \text{konkávní.} \end{array} \right.$

Konvexnost, konkávnost a inflexe.

Příklad

Vyšetřete konvexnost, resp. konkávnost, funkce $f(x) = e^x$ v bodě 1.

Definice

Řekneme, že funkce f je $\left\{ \begin{array}{l} \text{konvexní na množině } M \subset D(f'), \\ \text{konkávní na množině } M \subset D(f') \end{array} \right\}$ jestliže je

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{konvexní} \\ \text{konkávní} \end{array} \right. \text{ v každém } a \in M.$$

Příklad

Zjistěte, kde je konvexní a kde konkávní funkce $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ definovaná na R .

Konvexnost, konkávnost a inflexe.

Věta 6.5

Má-li funkce f inflexi v bodě a a má-li v bodě a druhou derivaci, pak $f''(a) = 0$.

Příklad

Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Konvexnost, konkávnost a inflexe.

Věta 6.6

Nechť funkce f má spojitou derivaci v bodě a

a) Existuje-li okolí U bodu a takové, že

1) pro všechna $x \in U, x < a$, je $f''(x) \leq 0$

a pro všechna $x \in U, x > a$, je $f''(x) \geq 0$

nebo

2) pro všechna $x \in U, x < a$, je $f''(x) \geq 0$

a pro všechna $x \in U, x > a$, je $f''(x) \leq 0$,

pak má funkce f v bodě a inflexi.

b) Existuje-li okolí U bodu a takové, že

pro všechna $x \in U, x \neq a$, je $f''(x) > 0$

nebo

pro všechna $x \in U, x \neq a$, je $f''(x) < 0$,

pak nemá funkce f v bodě a inflexi.

Poznámka

V případě a) mění druhá derivace f'' své hodnoty v bodě a z nekladných na nezáporné nebo naopak.

V případě b) v bodě a nemění znaménko.

Konvexnost, konkávnost a inflexe.

Příklad

Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Věta 6.7

Je-li $f''(a) = 0$ a $f'''(a) \neq 0$, pak má funkce f v bodě a inflexi.

Příklad

Nalezněte inflexní body funkce $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

Asymptoty

Definice

Řekneme, že funkce f má svislou asymptotu $x = a$, jestliže má v bodě a alespoň jednu nevlastní jednostrannou limitu.

Příklad

Určete svislé asymptoty funkcí

- 1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
- 2) $f(x) = \ln x$

Definice

Řekneme, že funkce f má šikmou asymptotu $y = ax + b$, jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax - b] = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax - b] = 0 .$$

Příklad

Určete šikmé asymptoty funkcí

- 1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$
- 2) $f(x) = \ln x$
- 3) $f(x) = \arctg x$

Asymptoty

Věta 6.8

Funkce f má šikmou asymptotu $y = ax + b$, právě když

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax],$$

nebo

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax].$$

Příklad

Určete šikmé asymptoty funkce $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}$.

$$(y = x + 3)$$

Asymptotes

Definition

We say that the graph of function f has vertical asymptote $x = a$ if

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty .$$

We say that the graph of function f has asymptote $y = kx + q$ if

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx - q] = 0 \quad \text{or} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx - q] = 0 .$$

Theorem

The graph of function f has asymptote $y = kx + q$ if and only if

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] ,$$

or

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - kx] .$$