

Matematika 1B.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice. (Limita funkce)

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě $A \in E_n$ **limitu** b , jestliže ke každému okolí V bodu b existuje okolí U bodu A tak, že pro všechny body $X \in U$, $X \neq A$, je $f(X) \in V$.

Píšeme pak

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = b .$$

Příklad. (funkce, která nemá limitu v počátku)

Funkce

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

definovaná v $E_2 \setminus \{O\}$ nemá v počátku O limitu.

Věta 2.1.

Funkce n proměnných má v daném bodě nejvýše jednu limitu.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Konstantní funkcí n proměnných rozumíme funkci f definovanou na E_n předpisem

$$f(X) = a ,$$

kde $a \in \mathbb{R}$.

Je-li $a = 0$, pak konstantní funkcí n proměnných nazveme **nulovou funkcí n proměnných**.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Věta 2.2.

Je-li

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = b, \quad \lim_{X \rightarrow A} g(X) = c,$$

pak

$$\lim_{X \rightarrow A} [f(X) + g(X)] = b + c, \quad (1)$$

$$\lim_{X \rightarrow A} [f(X) - g(X)] = b - c, \quad (2)$$

$$\lim_{X \rightarrow A} [f(X) \cdot g(X)] = b \cdot c, \quad (3)$$

je-li navíc $c \neq 0$, pak také

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{b}{c}. \quad (4)$$

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Polynomem n proměnných se rozumí funkce, která libovolnému bodu z E_n přiřazuje součet součinů nějakých čísel a celých nezáporných mocnin jeho souřadnic, tj. součet výrazů tvaru

$$ax_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

zvaných **členy polynomu**,

přitom k_1, k_2, \dots, k_n jsou celá nezáporná čísla a číslo a se nazývá **koeficient** příslušného členu.

Příklad.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + 2x_2^2 + 3x_3^3 + \dots + nx_n^n$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{2} + 2x_1x_2^2x_3 \dots x_n^n$$

definované na E_n jsou polynomy n proměnných.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Racionální funkce n proměnných je funkce, která vzniká dělením dvou polynomů, přičemž dělitel není nulová funkce. Jejím definičním oborem je E_n s výjimkou kořenů dělitele.

Příklad.

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} .$$

Příklad.

Je-li f polynom n proměnných, pak

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A)$$

pro každý bod $A \in E_n$.

Je-li f racionální funkce n proměnných definovaná v bodě A , pak

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A) .$$

Limita a spojitost funkce n proměnných

V definici limity místo $b \in \mathbf{R}$ uijeme nevlastní bod ∞ nebo $-\infty$.

Definice. (Nevlastní limita funkce)

Řekneme, že funkce f n proměnných má v bodě $A \in \mathbf{E}_n$ **nevlastní limitu** ∞ , resp. $-\infty$, jestliže ke každému okolí V nevlastního bodu ∞ , resp. $-\infty$, existuje okolí U bodu A takové, že pro všechny body $X \in U$, $X \neq A$, je $f(X) \in V$.

Píšeme pak

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = \infty \quad \text{resp.} \quad \lim_{X \rightarrow A} f(X) = -\infty .$$

Nevlastní limity mají analogické vlastnosti jako limity.

Příklad.

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty .$$

s -okolí ∞ , tj. $V = (s, \infty)$ $s > 0$ $U_{\frac{1}{\sqrt{s}}}(0)$.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Definice

Nechť $A \in D_f$, pak řekneme, že funkce f n proměnných je **spojitá v bodě A** , jestliže

$$\lim_{X \rightarrow A} f(X) = f(A) .$$

Příklad.

Polynom n proměnných je spojitý v každém bodě $A \in E_n$.

Racionální funkce n proměnných je spojitá v každém bodě $A \in E_n$, v němž je definována.

Limita a spojitost funkce n proměnných

Věta 2.4. (o spojitosti součtu, rozdílu, součinu a podílu)

Jsou-li funkce f a g n proměnných spojité v bodě A , pak jsou v bodě A spojité i funkce $f + g$, $f - g$ a $f \cdot g$, je-li navíc $g(A) \neq 0$ je v bodě A spojitá i funkce $\frac{f}{g}$.

Věta 2.5. (o spojitosti složené funkce)

Jsou-li funkce g_1, g_2, \dots, g_p n proměnných spojité v bodě A a je-li funkce h p proměnných spojitá v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \dots, g_p(A)]$, pak složená funkce $f = h(g_1, g_2, \dots, g_p)$ je spojitá v bodě A .

Příklad.

Vyšetřete spojitost funkce $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ v bodě $[0, 0]$.

$g(X) = x^2 + y^2 + 1$ spojitá v bodě $[0, 0]$

$h(x) = \sqrt{x}$ spojitá v bodě 1

tedy dle věty $f = h(g)$ je spojitá v bodě $[0, 0]$.

Derivace a diferenciály funkce n proměnných

Definice. (Parciální derivace)

f je funkce n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A = [a_1, \dots, a_n] \in D(f)$, j je některé z čísel $1, 2, \dots, n$.

Definujeme funkci jedné proměnné g_j s definičním oborem

$$D(g_j) = \{x \in \mathbf{R}; [a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n] \in D(f)\}$$

a s funkčním předpisem

$$g_j(x) = f(a_1, a_2, \dots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_n) .$$

Má-li funkce g_j derivaci v bodě a_j , nazýváme ji **parciální derivací funkce f podle proměnné x_j v bodě A** a označíme $\frac{\partial f}{\partial x_j}(A)$.

Tedy

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = g_j'(a_j) .$$

Parciální derivací funkce f podle proměnné x_j rozumíme funkci n proměnných označenou $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, která každému bodu $A \in D(f)$, v němž existuje parciální derivace podle proměnné x_j , přiřazuje její hodnotu.

Derivace a diferenciály funkce n proměnných

Poznámka.

Parciální derivací podle proměnné x_j vypočítáme tak, že všechny proměnné až na j -tou „považujeme“ za konstanty a stanovíme derivaci takto vzniklé funkce jedné proměnné.

Příklad.

Určete obě parciální derivace funkce dvou proměnných

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

definované v E_2 .

Derivace a diferenciály funkce n proměnných

Věta 3.1.

Má-li funkce f n proměnných v nějakém okolí bodu A omezené parciální derivace podle všech proměnných, pak je v bodě A spojitá.

Poznámka.

Samotná existence parciálních derivací podle všech proměnných v bodě A nezaručuje spojitost funkce v bodě A .

Příklad.

Uvažujme funkci dvou proměnných

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \neq 0 \text{ a současně } y \neq 0, \\ 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0, \end{cases}$$

definovanou na E_2 .

není spojitá v počátku, ale $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Funkce diferencovatelné v bodě a diferenciál

Definice.

Řekneme, že funkce f n proměnných je **diferencovatelná v bodě A** , jestliže existují čísla c_1, c_2, \dots, c_n taková, že

$$\lim_{X \rightarrow A} \frac{f(X) - f(A) - c_1(x_1 - a_1) - c_2(x_2 - a_2) - \dots - c_n(x_n - a_n)}{d(X, A)} = 0 ,$$

přičemž $d(X, A)$ je vzdálenost bodů $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Věta 3.2.

Je-li funkce f n proměnných diferencovatelná v bodě A , pak je v bodě A spojitá, má v něm parciální derivace podle všech svých proměnných a platí

$$c_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(A) \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n .$$

Funkce diferencovatelné v bodě a diferenciál

Definice.

Je-li funkce f n proměnných diferencovatelná v bodě A , definujeme **diferenciál funkce f v bodě A** jako funkci

$$d_{f_A}(X) = c_1(x_1 - a_1) + c_2(x_2 - a_2) + \cdots + c_n(x_n - a_n)$$

definovanou na E_n .

Věta 3.3.

Má-li funkce f v bodě A spojité parciální derivace podle všech proměnných, pak je funkce f diferencovatelná v bodě A .

Příklad.

Zjistěte, zda je funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

diferencovatelná v bodě $A = [1, 2]$, a v kladném případě určete d_{f_A} .

Funkce diferencovatelné v bodě a diferenciál

Nyní $n = 2$, f funkce dvou proměnných diferencovatelná v bodě $A = [a_1, a_2]$, pak její diferenciál v tomto bodě je tvaru

$$d_{f_A}(X) = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2)$$

grafem je rovina

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2) .$$

rovina $y = a_2$ v ni přímka $z = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1)$ rovnoběžná s tečnou

rovina $x = a_1$ v ni přímka $z = \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2)$ rovnoběžná s tečnou

Rovina procházející oběma tečnami průsečnic grafu funkce f s rovinami $x = a_1$ a $y = a_2$ je tedy rovnoběžná s grafem diferenciálu funkce f v bodě A , má rovnici

$$z = f(A) + d_{f_A}(X) = f(A) + \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - a_2)$$

a nazýváme ji **tečnou rovinou grafu funkce f v bodě $T = [a_1, a_2, f(A)]$** .

Funkce diferencovatelné v bodě a diferenciál

Příklad.

Určete tečnou rovinu plochy

$$z = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $T = [1, 2, 11]$.