Matematika 1B.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Parciální derivace složené funkce

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferencovatelné v bodě A

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \dots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \dots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \dots, g_p(A)]$,

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \dots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \dots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \dots, g_p(A)]$, pak je složená funkce $f = h(g_1, g_2, \dots, g_p)$ diferencovatelná v bodě A

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \ldots, g_p(A)]$, pak je složená funkce $f = h(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ diferencovatelná v bodě A a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(B)\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(A) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(B)\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(A) + \cdots + \frac{\partial h}{\partial y_p}(B)\frac{\partial g_p}{\partial x_j}(A)$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \dots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \dots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \dots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \dots, g_p(A)]$, pak je složená funkce $f = h(g_1, g_2, \dots, g_p)$ diferencovatelná v bodě A a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(B)\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(A) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(B)\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(A) + \cdots + \frac{\partial h}{\partial y_p}(B)\frac{\partial g_p}{\partial x_j}(A)$$

pro $j = 1, 2, \dots, n$.

Příklad.

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.
Jsou-li funkce $g_1, g_2, \ldots, g_p$ n proměnných $x_1, x_2, \ldots, x_n$ diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_p$ diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \ldots, g_p(A)]$, pak je složená funkce $f = h(g_1, g_2, \ldots, g_p)$ diferencovatelná v bodě A a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(B)\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(A) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(B)\frac{\partial g_2}{\partial x_j}(A) + \cdots + \frac{\partial h}{\partial y_p}(B)\frac{\partial g_p}{\partial x_j}(A)$$

pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

Příklad.
Určete $\frac{\partial f}{\partial x}$ složené funkce $f = h(g_1, g_2, g_3)$, kde h je funkce proměnných u, v, w diferencovatelná na $\boldsymbol{E}_3$,
$g_1(x, y, z) = x \cos y \sin z$,
$g_2(x, y, z) = x \sin y \sin z$,
$g_3(x, y, z) = x \cos z$.

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace,

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.

Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.

V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,

v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.

Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.

V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí,

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.

Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.

V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,

v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$

Analogicky třetí, čtvrté,

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.

Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.

V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,

v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$

Analogicky třetí, čtvrté, páté

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí, čtvrté, páté a obecně m-té parciální derivace

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích, v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí, čtvrté, páté a obecně m-té parciální derivace značíme

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} \, .$$

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.

Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.

V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,

v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$

Analogicky třetí, čtvrté, páté a obecně m-té parciální derivace značíme

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} \,.$$

Příklad.

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.
Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její druhé parciální derivace, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.
V případě $j \neq k$ hovoříme o smíšených druhých parciálních derivacích,
v případě $j = k$ o ryzích druhých parciálních derivacích a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$
Analogicky třetí, čtvrté, páté a obecně m-té parciální derivace značíme

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \ldots \partial x_{j_m}} \ .$$

Příklad.
Určete všechny druhé parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x^2 y + x^4 y^3 \quad \text{definované v } \boldsymbol{E}_2 \ .$$

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů

Věta 3.5.

Parciální derivace vyšších řádů

Věta 3.5.
Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ diferencovatelné v bodě A,

Parciální derivace vyšších řádů

Věta 3.5.
Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ diferencovatelné v bodě A, pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(A) \ .$$

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná,

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m - 1$,

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A,

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A, pak všechny m-té parciální derivace v bodě A lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovny.

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A, pak všechny m-té parciální derivace v bodě A lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovny.

Příklad.

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m - 1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A, pak všechny m-té parciální derivace v bodě A lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovny.

Příklad.
Je-li např. f funkce dvou proměnných třikrát diferencovatelná v bodě A,

Funkce m-krát diferencovatelné v bodě

Definice.
Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A m-krát diferencovatelná, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m-1)$-ní parciální derivace a funkce f a všechny její k-té parciální derivace, $k < m-1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A.

Věta 3.6.
Je-li funkce f n proměnných m-krát diferencovatelná v bodě A, pak všechny m-té parciální derivace v bodě A lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovny.

Příklad.
Je-li např. f funkce dvou proměnných třikrát diferencovatelná v bodě A, pak

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}\ .$$

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$,

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$,

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$,
$\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor,

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\; A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) \; .$$

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s})\ .$$

Má-li funkce g_s derivaci v bodě 0,

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s})\ .$$

Má-li funkce g_s derivaci v bodě 0, nazýváme ji směrovou derivací funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) \ .$$

Má-li funkce g_s derivaci v bodě 0, nazýváme ji směrovou derivací funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$ a značíme ji

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, $\boldsymbol{s}$ jednotkový n-rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in R;\ A + t\boldsymbol{s} \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) \ .$$

Má-li funkce g_s derivaci v bodě 0, nazýváme ji směrovou derivací funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$ a značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) \quad (= g_s'(0)\,) \ .$$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A)$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2,4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{g_s(t) - g_s(0)}{t}$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{g_s(t) - g_s(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + t\boldsymbol{s}) - f(A)}{t}$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{g_s(t) - g_s(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + t\boldsymbol{s}) - f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f

Směrová derivace a gradient

Příklad
Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2,4)$.

Poznámka
Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{g_s(t)-g_s(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+t\boldsymbol{s})-f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f v bodě A

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{g_s(t)-g_s(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+t\boldsymbol{s})-f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t \to 0} \frac{g_s(t) - g_s(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(A + t\boldsymbol{s}) - f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$ popisuje, jak rychle se mění závisle proměnná s pohybem bodu A

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1,2]$ ve směru vektoru $\boldsymbol{s} = (2,4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{s}}(A) = \lim_{t\to 0} \frac{g_s(t) - g_s(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(A + t\boldsymbol{s}) - f(A)}{t}$

tj. směrová derivace funkce f v bodě A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$ popisuje, jak rychle se mění závisle proměnná s pohybem bodu A ve směru vektoru $\boldsymbol{s}$.

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j}$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme

$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0)$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

a počítáme

$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} =$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_j+t,\ldots,a_n)-f(A)}{t} =$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme

$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_j+t,\ldots,a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme

$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_j+t, \ldots, a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

$= \lim_{u \to a_j} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, u, \ldots, a_n)-f(A)}{u-a_j}$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme
$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_j+t,\ldots,a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

$= \lim_{u\to a_j} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,u,\ldots,a_n)-f(A)}{u-a_j} = \lim_{u\to a_j} \frac{g_j(u)-g_j(a_j)}{u-a_j}$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

a počítáme

$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1,a_2,\dots,a_j+t,\dots,a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

$= \lim_{u \to a_j} \frac{f(a_1,a_2,\dots,u,\dots,a_n)-f(A)}{u-a_j} = \lim_{u \to a_j} \frac{g_j(u)-g_j(a_j)}{u-a_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(A),$

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

a počítáme

$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(A+te_j)-f(A)}{t} = = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,a_j+t,\ldots,a_n)-f(A)}{t} =$

$$u = a_j + t$$

$= \lim_{u\to a_j} \frac{f(a_1,a_2,\ldots,u,\ldots,a_n)-f(A)}{u-a_j} = \lim_{u\to a_j} \frac{g_j(u)-g_j(a_j)}{u-a_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(A),$

tedy parciální derivace jsou zvláštním případem směrových derivací.

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t)$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s})$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \dots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \dots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A)$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g'_s(0)$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \dots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g'_s(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g'_s(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g_s'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g_s'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme gradient funkce f v bodě A

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \dots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g_s'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme gradient funkce f v bodě A jako n-rozměrný vektor

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \ldots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g_s'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme gradient funkce f v bodě A jako n-rozměrný vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right)$$

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A,
$g_s(t) = f(A + t\boldsymbol{s}) = f(a_1 + t\boldsymbol{s_1}, a_2 + t\boldsymbol{s_2}, \dots, a_n + t\boldsymbol{s_n})$,
a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h_j'(0) = s_j$)
$\Rightarrow$ g_s je diferencovatelná v 0 a platí
$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g_s'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$

Definice
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A, definujeme gradient funkce f v bodě A jako n-rozměrný vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)\right)$$

a označíme jej $\mathrm{grad} f(A)$.

Směrová derivace a gradient

Poznámka

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

Směrová derivace a gradient

Poznámka

Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

Směrová derivace a gradient

Poznámka

Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \mathrm{grad}\, f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\mathrm{grad}\, f(A) \neq 0$, pak

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A)$

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha$

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší,

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|. \cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|. \cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší, resp. nejmenší,

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší, resp. nejmenší, právě když $\alpha = 0,$

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|.\cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|.\cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší, resp. nejmenší, právě když $\alpha = 0$, resp. $\alpha = \pi$.

Směrová derivace a gradient

Poznámka
Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \operatorname{grad} f(A).\boldsymbol{s}$$

kde . značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)
Je-li $\operatorname{grad} f(A) \neq 0$, pak

$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\operatorname{grad} f(A)|.|\boldsymbol{s}|. \cos\alpha = |\operatorname{grad} f(A)|. \cos\alpha,$

kde α značí úhel vektorů $\boldsymbol{s}$ a $\operatorname{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší, resp. nejmenší, právě když $\alpha = 0$, resp.
$\alpha = \pi$.
(tj. $\boldsymbol{s}$ je násobkem gradientu).

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete jednotkový vektor $\boldsymbol{s}$, v jehož směru je směrová derivace

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ největší a zjistěte ji.