

Matematika 1B.

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Parciální derivace složené funkce

Věta 3.4.

Jsou-li funkce g_1, g_2, \dots, g_p n proměnných x_1, x_2, \dots, x_n diferencovatelné v bodě A a je-li funkce h p proměnných y_1, y_2, \dots, y_p diferencovatelná v bodě $B = [g_1(A), g_2(A), \dots, g_p(A)]$, pak je složená funkce $f = h(g_1, g_2, \dots, g_p)$ diferencovatelná v bodě A a platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(A) = \frac{\partial h}{\partial y_1}(B) \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(A) + \frac{\partial h}{\partial y_2}(B) \frac{\partial g_2}{\partial x_j}(A) + \dots + \frac{\partial h}{\partial y_p}(B) \frac{\partial g_p}{\partial x_j}(A)$$

pro $j = 1, 2, \dots, n$.

Příklad.

Určete $\frac{\partial f}{\partial x}$ složené funkce $f = h(g_1, g_2, g_3)$, kde h je funkce proměnných u, v, w diferencovatelná na \mathbf{E}_3 ,

$$g_1(x, y, z) = x \cos y \sin z,$$

$$g_2(x, y, z) = x \sin y \sin z,$$

$$g_3(x, y, z) = x \cos z.$$

Parciální derivace vyšších řádů

Parciální derivace vyšších řádů jsou definovány opakovaným parciálním derivováním funkce.

Určením parciálních derivací parciálních derivací funkce f dostaneme její **druhé parciální derivace**, druhou parciální derivaci vzniklou derivováním nejprve podle proměnné x_j a pak podle proměnné x_k značíme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}$.

V případě $j \neq k$ hovoříme o **smíšených druhých parciálních derivacích**, v případě $j = k$ o **ryzích druhých parciálních derivacích** a píšeme $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$.

Analogicky třetí, čtvrté, páté a obecně m -té parciální derivace značíme

$$\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \dots \partial x_{j_m}} .$$

Příklad.

Určete všechny druhé parciální derivace funkce

$$f(x, y) = x^2 y + x^4 y^3 \quad \text{definované v } \mathbf{E}_2 .$$

Parciální derivace vyšších řádů

Věta 3.5.

Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ diferencovatelné v bodě A , pak platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}(A) .$$

Funkce m -krát diferencovatelné v bodě

Definice.

Řekneme, že funkce f n proměnných je v bodě A **m -krát diferencovatelná**, jestliže jsou v bodě A diferencovatelné všechny její $(m - 1)$ -ní parciální derivace a funkce f a všechny její k -té parciální derivace, $k < m - 1$, jsou diferencovatelné na všech bodech nějakého okolí bodu A .

Věta 3.6.

Je-li funkce f n proměnných m -krát diferencovatelná v bodě A , pak všechny m -té parciální derivace v bodě A lišící se jen pořadím parciálního derivování jsou si rovny.

Příklad.

Je-li např. f funkce dvou proměnných třikrát diferencovatelná v bodě A , pak

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} .$$

Směrová derivace a gradient

Je-li funkce f n proměnných s definičním oborem $D(f)$, $A \in D(f)$, s jednotkový n -rozměrný vektor, definujeme funkci g_s jedné proměnné s definičním oborem

$$D(g_s) = \{t \in \mathbb{R}; A + ts \in D(f)\}$$

a funkčním předpisem

$$g_s(t) = f(A + ts) .$$

Má-li funkce g_s derivaci v bodě 0, nazýváme ji **směrovou derivací funkce f v bodě A ve směru vektoru s** a značíme ji

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) \quad (= g'_s(0)) .$$

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete směrovou derivaci funkce

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ ve směru vektoru $s = (2, 4)$.

Poznámka

Rozepsáním

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g_s(t) - g_s(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + ts) - f(A)}{t}$$

tj. směrová derivace funkce f v bodě A ve směru vektoru s popisuje, jak rychle se mění závisle proměnná s pohybem bodu A ve směru vektoru s .

Směrová derivace a gradient

Uvažujme základní jednotkový vektor

$$e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

a počítáme

$$\frac{\partial f}{\partial e_j} = g'_{e_j}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(A + te_j) - f(A)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_j + t, \dots, a_n) - f(A)}{t} =$$

$$u = a_j + t$$

$$= \lim_{u \rightarrow a_j} \frac{f(a_1, a_2, \dots, u, \dots, a_n) - f(A)}{u - a_j} = \lim_{u \rightarrow a_j} \frac{g_j(u) - g_j(a_j)}{u - a_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}(A),$$

tedy parciální derivace jsou zvláštním případem směrových derivací.

Směrová derivace a gradient

Předpokládáme, že funkce f je diferencovatelná v bodě A ,

$$g_s(t) = f(A + ts) = f(a_1 + ts_1, a_2 + ts_2, \dots, a_n + ts_n),$$

a funkci g_s považujeme za složenou funkci s vnější složkou f a s vnitřními složkami

$$h_j(t) = a_j + ts_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

(h_j jsou diferencovatelné v 0, $h'_j(0) = s_j$)

$\Rightarrow g_s$ je diferencovatelná v 0 a platí

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = g'_s(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(A)s_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(A)s_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(A)s_n \quad (*)$$

Definice

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě A , definujeme **gradient funkce f v bodě A** jako n -rozměrný vektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(A), \frac{\partial f}{\partial x_2}(A), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(A) \right)$$

a označíme jej **grad $f(A)$** .

Směrová derivace a gradient

Poznámka

Vzorec (*) lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = \text{grad} f(A) \cdot s$$

kde \cdot značí skalární součin vektorů.

Poznámka (n=2 nebo n=3)

Je-li $\text{grad} f(A) \neq 0$, pak

$$\frac{\partial f}{\partial s}(A) = |\text{grad} f(A)| \cdot |s| \cdot \cos \alpha = |\text{grad} f(A)| \cdot \cos \alpha,$$

kde α značí úhel vektorů s a $\text{grad} f(A)$.

Směrová derivace v bodě A je tedy největší, resp. nejmenší, právě když $\alpha = 0$, resp.

$\alpha = \pi$.

(tj. s je násobkem gradientu).

Směrová derivace a gradient

Příklad

Určete jednotkový vektor s , v jehož směru je směrová derivace

$$f(x, y) = x^2 + xy + 2y^2$$

v bodě $A = [1, 2]$ největší a zjistěte ji.