Matematika 1B.
Funkce zadané implicitně

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Funkce zadané implicitně

1) Funkce zadaná explicitním vyjádřením (explicitní funkce) je zadána analytickým předpisem

$$y = f(x)\ .$$

Příklad 1.

$f(x) = \sin x$
$f(x) = x^3 + 2x - 11$

2) Funkce zadaná parametrickým vyjádřením (parametrická funkce) je zadána soustavou rovnic

$$x = f_1(t),\ \ y = f_2(t)\ ,$$

kde t je reálný parametr.

Příklad 2.

$x = 2 + 3t,\ \ y = 1 - t\ \ ,\ \ t \in R\ ,$ přímka
$x = \cos t,\ \ y = \sin t\ \ ,\ \ t \in [0, 2\pi]\ ,$ kružnice
$x = 2\cos t,\ \ y = 5\sin t\ \ ,\ \ t[0, 2\pi]\ ,$ elipsa

Funkce zadané implicitně

3) Funkce zadaná v implicitním tvaru (implicitní funkce) je zadána pomocí funkce dvou reálných proměnných. Ptáme se, kdy rovnice

$$g(x, y) = 0$$

určuje y jako funkci proměnné x.

Příklad 3.

$$y - x - \mathrm{arctg} y = 0 \ .$$

Funkce zadané implicitně

Uvažujme funkci g dvou proměnných a označme

$$P = \{[x, y] \in D(g);\ g(x, y) = 0\}\ .$$

Množina P může být prázdná, konečná i nekonečná.
Nás zajímá případ, kdy P je grafem nějaké funkce f jedné proměnné.

Příklad 4.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$

Příklad 5.

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Příklad 6.

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

Funkce zadané implicitně

Příklad 7.

$$g(x, y) = x + y$$

Příklad 8.

$$g(x, y) = xy - |xy|$$

Příklad 9.

$$y - x - \mathrm{arctg} y = 0\ .$$

Příklad 10.

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 4 = 0\ .$$

Příklad 11.

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x + 18 = 0\ .$$

Funkce zadané implicitně

Věta 4.1. (věta o implicitní funkci)
Je-li g funkce dvou proměnných, jejímž kořenem je bod $B = [a, b]$, má-li funkce g spojité všechny m-té parciální derivace v nějakém okolí V bodu B a je-li $\frac{\partial g}{\partial y}(B) \neq 0$, pak existuje okolí U bodu a a jediná funkce f jedné proměnné, která má na U spojitou m-tou derivaci, pro každé $x \in U$ platí

$$g(x, f(x)) = 0 \tag{1}$$

a

$$f(a) = b\,. \tag{2}$$

Definice
Funkci f (z Věty 4.1.) nazýváme funkcí zadanou implicitně rovnicí $g(x, y) = 0$ a bodem B.

Funkce zadané implicitně

Poznámka (derivování funkce zadané implicitně)
Rovnost (1) derivujeme podle x s přihlédnutím ke skutečnosti, že v (1) je za druhou proměnnou „dosazena“ funkce proměnné x.
(aplikujeme větu o složené funkci)
Dostaneme

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f'(x) = 0 \tag{3}$$

pokud

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$$

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x))}$$

Funkce zadané implicitně

dalším derivováním (3) dostaneme

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)).f'(x) +$$

$$+(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y}(x, f(x)).f'(x)).f'(x) +$$

$$+\frac{\partial g}{\partial y}(x, f(x)).f''(x) = 0 \ ,$$

odtud vypočítáme

$$f''(x) = \ldots$$

podobně postupujeme dále ...

Funkce zadané implicitně

Příklad.
Určete tečnu grafu funkce f zadané implicitně rovnicí

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 4 = 0$$

a bodem $B = [1, 2]$ v bodě B.

Analogicky postupujeme u funkcí více proměnných.

Příklad.
Určete tečnou rovinu grafu funkce $f(x, y)$ dvou proměnných zadané implicitně rovnicí

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x + 18 = 0$$

a bodem $B = [1, 2, 3]$ v bodě B.