Katedra matematiky a didaktiky matematiky FP TU v Liberci

zve zájemce z řad pedagogů, studentů i veřejnosti na populárně naučnou přednášku v rámci cyklu

Semináře KO-MIX

RNDr. Zdeněk MIHULA (Katedra matematiky, FEL, ČVUT, a Katedra matematické analýzy, MFF, UK):

OD REDUKCE K OPTIMALITĚ

Přednáška se koná ONLINE v **pondělí 29. března 2021 od 14:20 hodin**, odkaz bude upřesněn na webu KMD.

Ukážeme si (jeden z mnoha příkladů), jak lze složitý, několikarozměrný problém zredukovat na ekvivalentní jednorozměrný problém. Uvážíme Sobolevovu nerovnost (resp. jednu její možnou formu), která říká, že pro každé $p \in [1, n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, existuje kladná konstanta C (závisející na p a n) taková, že pro každou slabě diferencovatelnou funkci $u\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s kompaktním nosičem platí

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad \text{kde} \qquad p^* = \frac{np}{n-p}. \tag{1}$$

Naznačíme si, jak lze platnost nerovnosti (1), která se týká funkcí více proměnných, *zredukovat na ekvivalentní problém* existence kladné kontanty $\widetilde{C}$ takové, že pro každou nezápornou (měřitelnou) funkci f na intervalu $(0, \infty)$ platí

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(s) s^{-1+\frac{1}{n}}\, ds\right)^{p^*} dt\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq \widetilde{C} \left(\int_0^\infty f(t)^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Ačkoliv jsou Lebesguovy L^p prostory velmi důležité, již desítky let se ukazuje, že škála Lebesgueových prostorů často nestačí, chceme-li zachytit jemnější integrační vlastnosti funkcí, a je proto nutné uvažovat i obecnější třídy prostorů funkcí. Zmíníme se o tzv. třídě prostorů funkcí invariantních vůči nerostoucímu přerovnání, která zaštiťuje celou řadu různých prostorů funkcí, které se objevují zejména při analýze složitých, limitních situací. Způsob, jakým zredukujeme platnost (1) na platnost (2), funguje i pro tuto obecnou třídu prostorů funkcí. Nejenom že získáme užitečné kritérium pro ověřování platnosti nerovností Sobolevova typu, ale díky této redukci budeme dokonce schopni nalézt v jistém smyslu *optimální výsledky*, které už nelze v daném smyslu zlepšit.