Martin Plešinger

Různá témata:

- **Tenzorové rozklady a formáty**
- **Hierarchické matice**
- **Průvodní matice polynomů**
- **Maticové rovnice**
- **Úlohy model reduction v teorii dynamických systémů**
- **Zobecněný a nelineární problém vlastních čísel**
- **Maticová reprezentace kvaternionů, řešitelnost polynomů v kvaterionech**
- **"Batman" matrix decomposition**
- **Lineární algebra ve zpracování obrazu**
- **Vliv rozložení paprsků tomografu na rekonstrukci obrazu**

Typ práce: Všechna výše uvedená témata jsou možná jako BD i DP

Cíl práce: Specifikace zadání *dle dohody a aktuálních možností* (školitele i studenta).

Požadavky:
- Základní znalosti z lineární algebry
- Elementární znalost anglického jazyka
- Práci by bylo vhodné psát v LaTeXu
- Zájem o téma

Hierarchické matice: Moderní přístup k práci s velkými hustými maticemi

Hierarchical matrices: A contemporary approach for large-scalle dense matrices

Typ práce: BP/DP

Abstrakt: Řešení reálných, např. fyzikálních nebo inženýrských problémů často vede na úlohy řešení rozsáhlé soustavy lineárních rovnic s řídkou maticí. Principy práce s řídkými maticemi jsou dlouho studované a dobře známé. Je též dobře známé, že inverzí řídké matice dostaneme matici obecně hustou. Reálné úlohy se samozřejmě neřeší hledáním inverzní matice, nicméně její aproximace (v nějakém smyslu) bývá užitečná např. při konstrukci předpodmiňovače pro krylovovské iterační metody. Snaha pracovat s velkou a přitom hustou maticí vedla ke konceptu tzv. hierarchických matic.

Cíl práce: Tato bakalářská práce si klade za cíl objasnit čtenáři základní motivaci k hierarchickému přístupu k práci s hustými maticemi. Prezentovat jednoduché (malé) příklady použití hierarchického přístupu a prodiskutovat základní operace (např. sčítání a násobení matic) prováděné s hierarchickými maticemi.

Požadavky:

- Základní znalosti z lineární algebry
- Základní orientace v MATLABu
- Elementární znalost anglického jazyka
- Práci by bylo vhodné psát v LaTeXu
- Zájem o téma

Literatura:

- M. Bebendorf: *Hierarchical Matrices*, Springer-Verlag (Lecture notes in computational science and engineering (LCNSE) 63), Berlin, Heidelberg, 2008.
- W. Hackbusch: *Hierarchische Matrizen: Algorithmen und Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009.
- S. Chandrasekaran, P. Dewilde, M. Gu, W. Lyons, and T. Pals: *A fast solver for HSS representations via sparse matrices*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications 29(1) (2006/07), str. 67–81.
- S. Pauli: *A numerical solver for Lyapunov equations based on the matrix sign function iteration in HSS arithmetic*, Semester Thesis, SAM, ETH Zurich, 2010.

Rychlý řešič maticových rovnic a soustav závislých na parametru a jeho implementace v MATLABu

Fast solver for matrix Lyapunov equation which dependend on a real parameter and its implementation

Typ práce: BP/DP

Abstrakt: V teorii řízení se při analýze řiditelnosti (controlability) a pozorovatelnosti (observability) dynamického systému setkáváme s potřebou řešit lyapunovské rovnice, tedy rovnice tvaru $AX + XA^T = -BB^T$, kde A a X jsou čtvercové matice řádu n. Tato maticová rovnice lze formálně zobecněnit (na zobezněnou lyapunovskou rovnici, nebo na Sylvestrovu rovnici). Potřeba rychlých a spolehlivých řešičů pro rozsáhlé rovnice tohoto typu je přirozeným vyústěním snahy o co nejpřesnější popis reálných dynamických systémů a růstu výpočetních možností současných počítačů. Řešiče optimalizované pro tento typ maticovýh rovnic umožňují, po jednoduché modifikaci, též řešit klasické soustavy rovnic $A(t)x(t) = b(t)$ analyticky závislé na parametru t. Takové rovnice mohou

vzniknout diskretizací parciální diferenciální rovnice (PDE), která je závislá na parametru, nebo při diskretizaci PDE na doméně závislé na parametru.

Cíl práce: Cílem práce je naprogramovat řešič vybraného typu rovnice, postavený na některé z krylovovských metod (nejlépe na metodě konjugovaných gradientů CG). Cílem bude řešit relativně rozsáhlé úlohy, typicky n¿10000, řešení (a každý vektor v průběhu výpočtu) tedy bude typicky sestávat z n2 čísel což, ve standardní (dvojité) přesnosti, odpovídá více než 762 MB. Úlohy je však potřeba řešit rychle, tj. v řádech maximálně minut. Proto bude potřeba využívat efektivní komprese dat s využitím aproximace matic maticemi nízkého ranku. Jako předpodmiňovač můžeme užít iteraci pro výpočet znaménkové funkce matice sgn(A), napříkladp pomocí hierarchických matic.

Požadavky:
- Základní znalosti z lineární algebry
- Základní orientace v MATLABu
- Elementární znalost anglického jazyka
- Práci by bylo vhodné psát v LaTeXu
- Zájem o téma

Literatura:

• A. C. Antoulas: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, SIAM, Philadelphia PA., 2005.
• W. Hackbusch: *Hierarchische Matrizen: Algorithmen und Analysis*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2009.

Metoda konjugovaných gradientů pro řešení zobecněných lyapunovských rovnic

The method of conjugate gradient for solving generalized Lyapunov equations

Typ práce: BP/DP

Cíl práce: V teorii řízení se při analýze řiditelnosti (controlability) a pozorovatelnosti (observability) dynamického systému setkáváme s potřebou řešit zobecněné lyapunovské rovnice, tedy rovnice tvaru $AXM^T + MXA^T = -BB^T$, kde A a X jsou čtvercové matice řádu n. Potřeba rychlých a spolehlivých řešičů pro rozsáhlé rovnice tohoto typu je přirozeným vyústěním snahy o co nejpřesnější popis reálných dynamických systémů a růstu výpočetních možností současných počítačů. Tyto rovnice mohou vznikat například při diskretizaci parciální diferenciální rovnice (PDE), popisující řízený jev, metodou konečných prvků. Metoda konjugovaných gradientů, pracující se zobecněným lyapunovským operátorem

$\mathcal{A} : X \longrightarrow AXM^T + MXA^T$ může být implementována mnoha různými způsoby.

Cíl práce: Cílem práce bude naprogramovat jednotlivé varianty v prostředí Matlab a provést sadu experimentů objasňující rozdíly v chování jednotlivých implementací.

Požadavky:
- Základní znalosti z lineární algebry
- Základní orientace v MATLABu
- Elementární znalost anglického jazyka
- Práci by bylo vhodné psát v LaTeXu
- Zájem o téma

Literatura:
- A. C. Antoulas: *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*, SIAM, Philadelphia PA., 2005.

Algoritmus redukce matice na pásový tvar a jeho implementace v MATLABu

The band generalization of Golub–Kahan algorithm and its implementation

Typ práce: BP/DP

Abstrakt: Nedávno bylo ukázáno, že (ortogonálně invariantní) lineární aproximační problémy tvaru $AX \approx B$ (typicky se jedná o úlohy nejmenších čtverců) lze redukovat na t. zv. core problém. Ten je v některých význačných případech snáze řešitelný než problém původní, přičemž řešení obou problémů jsou (v podstatě) identická. Přechod ke core problému tak může usnadnit výpočet řešení původního aproximačního problému, navíc teorie core problému přináší významný a nový vhled do teorie lineárních aproximačních problémů.

Cíl práce: Cílem práce je naprogramovat algoritmus redukce dané matice na pásový tvar. Taková redukce je jedním z nástrojů sloužících k vyjevení core problému. Algoritmus bude implementován v MATLABu v několika různých variantách: metodou Householderových odrazů (případně Givensových rotací) a jako algoritmus Lanczosova typu.

Požadavky:
- Základní znalosti z lineární algebry
- Základní orientace v MATLABu
- Elementární znalost anglického jazyka

- Práci by bylo vhodné psát v LaTeXu
- Zájem o téma

Literatura:

- A. Björck: *Bidiagonal decomposition and least squares*, presentation Canberra 2005.
- A. Björck: *A band-Lanczos generalization of bidiagonal decomposition*, presentation Stockholm, 2006.
- G. H. Golub, C. F. Van Loan: *Matrix computations*, 4th ed., The John Hopkins University Press, Baltimore and London, 2013.
- C. C. Paige, Z. Strakoš: *Core problem in linear algebraic systems*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27 (2006), str. 861–875.
- M. Plešinger: *The total least squares problem and reduction of data in* $AX \approx B$, Ph. D. Thesis, TU Liberec, 2008.
- D. M. Sima: *Regularization techniques in model fitting and parameter estimation*, Ph. D. Thesis, KU Leuven, 2006.

Numerická stabilita identifikace core problému pomocí Golubovy–Kahanovy bidiagonalizace

Numerical staiblity of an identification the core problem, using Golub–Kahan bidiagonalization

Typ práce: BP/DP

Abstrakt: Lineární aproximační úloha $Ax \approx b$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$ je dáno a $x \in \mathbb{R}^n$ je neznámý vektor lze řešit pomocí mnoha minimalizačních metod. Jednou z nich je tzv *úplný problém nejmenších čtverců* (TLS, z anglického total least squares),

$$\min \|[r, E]\|_F, \qquad \text{tak aby platilo} \qquad (b + r) \in \mathcal{R}(A + E),$$

tj. aby opravený systém byl kompatibilní $(A+E)x = b+r$. U každého takového přístupu je klíčová otázka existence a jednoznačnosti řešení. Užitečným teoretickým nástrojem, který se v této souvislosti používá, je tzv. *core problém.* Ten lze z původních dat extrahovat např. pomocí tzv. Golubovy–Kahanovy bidiagonalizace. Zda může být core problém užitečný i jako praktický (tedy početní) nástroj není jasné.

Cíl práce: Cílem práce bude seznámit se s TLS problémem pro úlohu $Ax \approx b$, teorii core problému a Golubovou–Kahanovou bidiagonalizací. Druhým cílem bude provést první kroky v analýze stability identifikace core problému v případě, že pracujeme v aritmetice s končenou přesností.

Požadavky:

- Základní znalosti z lineární algebry
- Základní orientace v MATLABu
- Elementární znalost anglického jazyka
- Práci by bylo vhodné psát v LaTeXu
- Zájem o téma

Literatura:

- G. H. Golub, C. F. Van Loan: Matrix computations, 3rd ed., The John Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.
- N. J. Higham: Accuracy and stability of numerical algorithms, 2nd ed., SIAM Publications, Philadelphia, 2002.
- C. C. Paige, Z. Strakoš: Core problem in linear algebraic systems, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27 (2006), pp. 861–875.

Úplný problém nejmenších čtverců a jeho maticová zobecnění

Total least squares problem and its matrix generalizations

Typ práce: BP/DP

Abstrakt: Lineární aproximační úloha $Ax \approx b$, kde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ a $b \in \mathbb{R}^m$ je dáno a $x \in \mathbb{R}^n$ je neznámý vektor lze řešit pomocí mnoha minimalizačních metod. Jednou z nich je tzv *úplný problém nejmenších čtverců* (TLS, z anglického total least squares),

$$\min \|[r, E]\|_F, \qquad \text{tak aby platilo} \qquad (b + r) \in \mathcal{R}(A + E),$$

tj. aby opravený systém byl kompatibilní $(A+E)x = b+r$. U každého takového přístupu je klíčová otázka existence a jednoznačnosti řešení. Existence a jednoznačnost TLS řešeni pro (vektorovou) úlohu $Ax \approx b$ je vyřešena již delší dobu.

Nedávno se podařil vyznamný posun v otázce existence a jednoznačnosti pro obecnější maticovou úlohu $AX \approx B$, kde $B \in \mathbb{R}^{m\times d}$, $X \in \mathbb{R}^{n\times d}$.

Cíl práce: Cílem práce bude seznámit se s TLS problémem pro úlohu $AX \approx B$. Druhým cílem bude zopakovat, resp. přeformulovat analýzu nejprve pro úlohu $XA \approx B$, a po té se pokusit zjistit, zda, resp. do jaké míry, je možné tuto analýzu jednoduše přenést na nejjednodušší obecnější maticovou úlohu $A_1XA_2 \approx B$.

Požadavky:

- Základní znalosti z lineární algebry
- Základní orientace v MATLABu

- Elementární znalost anglického jazyka
- Práci by bylo vhodné psát v LaTeXu
- Zájem o téma

Literatura:

• G. H. Golub, C. F. Van Loan: Matrix computations, 3rd ed., The John Hopkins University Press, Baltimore and London, 1996.

• C. C. Paige, Z. Strakoš: Core problem in linear algebraic systems, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27 (2006), pp. 861–875.

• I. Hnětynková, M. Plešinger, Z. Strakoš: Core problem within linear approximation problem $AX \approx B$ with multiple right-hand sides, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 34 (2013), pp. 917–931.