

Cvičení 3

Příklad 1. Nechť $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažte následující tvrzení:

- $|ab| = |a||b|$,
- $|a| = |-a|$,
- $|a + b| \leq |a| + |b|$,
- $|a - b| = |b - a| \geq |a| - |b|$,
- $|a - b| = |b - a| \geq |b| - |a|$,
- je-li $0 \leq a < b$ a n celé kladné, potom $a^n < b^n$.

Příklad 2. Na příkladu kružnice ukažte jednotlivé možnosti popisu křivky - explicitní, implicitní, parametrickými rovnicemi a vztahem mezi polárními souřadnicemi. Vysvětlete jakým způsobem nakreslíme graf křivky z popisu parametrickými rovnicemi a z popisu vztahu mezi polárními souřadnicemi.

Příklad 3. Převedte implicitní popis lemniskáty $((x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2))$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) a elipsy do polárních souřadnic. Potom nakreslete grafy obou křivek a Archimedovy spirály ($r = a\varphi$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $\varphi \geq 0$).

Příklad 4. Zopakujte, jak jsou definovány algebraické operace s nekonečny. Které operace nejsou definovány?

Příklad 5. Podle definice limity posloupnosti dokažte, že

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - 2n + 1}{n^2 - 1} = \infty$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}$ není rovna 1.

Příklad 6. Vypočtěte:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 - 3n + 1} \quad (2)$,
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 5}{n^3 + 1} \quad (0)$,

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{n^2 + 2n + 5} \quad (\infty),$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_0} \quad \left(= \begin{cases} 0 & k < l, \\ \frac{a_k}{b_l} & k = l, \\ \operatorname{sgn} \left(\frac{a_k}{b_l} \right) \cdot \infty & k > l. \end{cases} \right).$

Příklad 7. Vypočtěte: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right). \quad \left(-\frac{1}{2} \right)$

Příklad 8. Vypočtěte: $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n-1} - \sqrt{n}). \quad (0)$

Příklad 9. Vypočtěte:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n \quad (e^{-1}),$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n} \right)^n \quad (e^3).$

Příklad 10. Rozhodněte o konvergenci následujících posloupností:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n^2+2n+1} \quad (\text{neexistuje}),$

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{8n^2+2n+1} \quad (-1).$