

Cvičení 4

Příklad 1. Odvoďte, jak vypadá jednotkové okolí bodu $[0, 0]$ v metrikách:

- $\varrho_2([x, y], [0, 0]) \leq 1 : \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} \leq 1,$
- $\varrho_1([x, y], [0, 0]) \leq 1 : |x-0| + |y-0| \leq 1,$
- $\varrho_{max}([x, y], [0, 0]) \leq 1 : |x-0| \leq 1$ a zároveň $|y-0| \leq 1.$

(viz. přednáška)

Příklad 2. Dokažte, že je funkce $\frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$ spojitá v bodě $[0, 0, 0]$, jestliže ji v tomto bodě dodefinujeme nulou. (Použijte euklidovskou metriku.)

($\delta = \varepsilon$)

Příklad 3. Rozhodněte o spojitosti následujících funkcí:

- $e^{x+y} \sqrt{x^2 + y^2} + \cos(x-y)$ (spojitá v \mathbb{R}^2),
- $\frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ (nespojité v bodě $[0, 0]$),
- $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ (nespojité v bodě $[0, 0]$).

Pokud není funkce v některém bodě definována, vypočítejte v tomto bodě limitu, dodefinujte zadanou funkci touto limitou a poté vyšetřete spojitost takto vzniklé funkce.

Příklad 4. Určete následující limity:

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} (x^2 + xy + y^2)$ (7),
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,a)} \frac{1}{|x-y|}$ (∞),
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}$ (neexistuje),
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,3)} \frac{y-3}{x+y-5}$ (neexistuje),
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{x+3}{2x-y+7}$ $\left(\frac{1}{2}\right)$,

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,4)} \frac{x^3 - y^3}{x^4 - y^4} \quad \left(\frac{3}{16} \right),$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,-1)} \frac{1}{(x+1)^2 + (y+1)^2} \quad (\infty),$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} \frac{1}{(x+1)^3 + (y-1)^3} \quad (\text{neexistuje}),$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4} - 2} \quad (12),$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (1 + |x| + |y|)^{\frac{3}{|x|+|y|}} \quad (e^3).$

K vyřešení posledního příkladu nejprve modifikujte větu o limitě složené funkce (jediné reálné proměnné) pro případ, kdy vnitřní funkce je funkcí více proměnných.