Cvičení 12 a 13

Definice 1. Funkce $f(x)$ je integrovatelná s druhou mocninou na intervalu $[a, b]$ (píšeme $f \in L_2(a, b)$), jestliže

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Příklad 2. $x \in L_2(a, b)$ a $x^{-1/2} \notin L_2(-1, 1)$.

Poznámka 3.

- $f,\, g \in L_2(a, b) \Longrightarrow c_1 f + c_2 g \in L_2(a, b) \quad \forall c_1,\, c_2 \in \mathbb{R}$,
- $f,\, g \in L_2(a, b) \Longrightarrow fg \in L_2(a, b)$.

Funkce integrovatelné s druhou mocninou tedy tvoří lineární prostor.

Definice 4. Skalárním součinem funkcí $f,\, g \in L_2(a, b)$ rozumíme číslo

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)} \, dx.$$

Normou funkce $f \in L_2(a, b)$ nazýváme číslo

$$||f|| = \sqrt{(f, f)}.$$

Vzdáleností dvou funkcí $f,\, g \in L_2(a, b)$ rozumíme číslo

$$||f - g||.$$

Funkce, jejichž vzdálenost je rovna nule se nazývají ekvivalentní. Ekvivalentní funkce se mohou lišit například funkčními hodnotami v konečném počtu bodů.

Definice 5. Funkce $f,\, g \in L_2(a, b)$ jsou ortogonální v prostoru $L_2(a, b)$, jestliže

$$(f, g) = 0.$$

Funkce $f \in L_2(a, b)$ se nazývá normovanou, je-li její norma rovna jedné.
Množina funkcí $\{f_i \in L_2(a, b),\ i \in I\}$ se nazývá ortogonální v prostoru $L_2(a, b)$, jestliže

$$(f_i, f_j) = 0 \qquad \forall\ i \neq j,\ i, j \in I.$$

Jsou-li navíc všechny funkce normované, nazývá se tato množina ortonormální.

Příklad 6. Ověřte, že množina funkcí $\{\sin(ix)\}_{i=1}^{\infty}$ je ortogonální v prostoru $L_2(-\pi, \pi)$, ale není ortonormální.
Nápověda: $\sin(ix)\sin(jx) = \dfrac{\cos(i-j)x - \cos(i+j)x}{2}$.

Příklad 7. Ověřte, že množina funkcí $\left\{ \frac{e^{ijx}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{j\in\mathbb{Z}}$ je ortonormální v prostoru $L_2(-\pi,\pi)$.

Definice 8. Reálné funkce f, $g \in L_2(a,b)$ jsou ortogonální v prostoru $L_2(a,b)$ s váhou $v(x) \geq 0$, jestliže

$$\int_a^b v(x)f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Funkce $f \in L_2(a,b)$ se nazývá normovanou s váhou $v(x) \geq 0$, je-li

$$\int_a^b v(x)f^2(x)\,dx = 1.$$

Množina funkcí $\{f_i \in L_2(a,b),\ i \in I\}$ je ortogonální v prostoru $L_2(a,b)$ s váhou $v(x) \geq 0$, jestliže

$$\int_a^b v(x)f_i(x)f_j(x)\,dx = 0 \qquad \forall i \neq j,\ i,j \in I.$$

Jsou-li navíc všechny funkce normované s váhou $v(x) \geq 0$, nazývá se tato množina ortonormální s váhou $v(x) \geq 0$.

Definice 9. Nechť je dán ortonormální systém funkcí $\{\varphi_i \in L_2(a,b),\ i \in I\}$, $f \in L_2(a,b)$. Potom řadu

$$\sum_{i\in I} (f,\varphi_i)\varphi_i$$

nazýváme (zobecněnou) Fourierovou řadou příslušnou k funkci f. Čísla (f,φ_i) se nazývají Fourierovy koeficienty funkce f vzhledem k systému $\{\varphi_i \in L_2(a,b),\ i \in I\}$.

Věta 10. *Pro každý ortonormální systém funkcí $\{\varphi_i \in L_2(a,b),\ i \in I\}$ a pro každou funkci $f \in L_2(a,b)$, platí následující Besselova nerovnost:*

$$\sum_{i\in I} (f,\varphi_i)^2 \leq ||f||^2.$$

Definice 11. Ortonormální systém funkcí $\{\varphi_i \in L_2(a,b), i \in \mathbb{N}\}$ se nazývá úplný v $L_2(a,b)$, jestliže pro každou funkci $f \in L_2(a,b)$ platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \left|\left| f - \sum_{i=1}^{n} (f,\varphi_i)\varphi_i \right|\right| = 0.$$

Věta 12. *Ortonormální systém funkcí $\{\varphi_i \in L_2(a,b), i \in \mathbb{N}\}$ je úplný v $L_2(a,b)$ právě tehdy, když pro každou funkci $f \in L_2(a,b)$ platí následující Parsevalova rovnost:*

$$\sum_{i} (f,\varphi_i)^2 = ||f||^2.$$

Speciálně pro trigonometrický systém (ten je úplný) na intervalu $(-l,l)$ máme:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i^2 + b_i^2) = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f^2(x)\,dx.$$

Poznámka 13. (Gramm-) Schmidtův ortogonalizační proces. Máme-li systém lineárně nezávislých funkcí $\{\varphi_i \in L_2(a,b),\ i \in I\}$, potom lze z tohoto systému vytvořit ortogonální systém takto:

$$\psi_1 = \varphi_1,$$

$$\psi_2 = \varphi_2 + k_{21}\psi_1,$$

kde konstantu k_{21} volíme takto:

$$0 = (\psi_2, \psi_1) = (\varphi_2 + k_{21}\psi_1, \psi_1) \quad \Longleftrightarrow \quad k_{21} = -\frac{(\varphi_2, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)},$$

$$\psi_3 = \varphi_3 + k_{32}\psi_2 + k_{31}\psi_1,$$

kde konstanty k_{31}, k_{32} volíme takto:

$$0 = (\psi_3, \psi_1) = (\varphi_3 + k_{32}\psi_2 + k_{31}\psi_1, \psi_1), \quad 0 = (\psi_3, \psi_2) = (\varphi_3 + k_{32}\psi_2 + k_{31}\psi_1, \psi_2)$$

$$\Longleftrightarrow \quad k_{31} = -\frac{(\varphi_3, \psi_1)}{(\psi_1, \psi_1)}, \quad k_{32} = -\frac{(\varphi_3, \psi_2)}{(\psi_2, \psi_2)}$$

a podobně pokračujeme dále.

Příklad 14. Najděte ortogonální polynomy s váhou:

- $v(x) = e^{-x}$ na intervalu $[0, \infty)$ (Laguerrovy),
  $1,\ x-1,\ x^2 - 4x + 2,\ \ldots$
- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na intervalu $[-1, 1]$ (Čebyševovy)
  $1,\ x,\ x^2 - \dfrac{1}{2},\ \ldots$