Cvičení 2

Definice 1. Fourierovým obrazem funkce $f(t)$ $\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty\right)$ nazýváme funkci

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iyt}\, dt.$$

Zobrazení, které funkci f přiřazuje její Fourierův obraz se nazývá Fourierova transformace.

Definice 2. Vzorec pro inverzní Fourierovu transformaci:

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{iyt}\, dy.$$

Věta 3. *V každém bodě x_0, v němž je funkce f spojitá, se Fourierův integrál $\widehat{f}$ rovná hodnotě $f(x_0) = \widehat{f}(x_0)$. Zatímco v bodech, v nichž funkce f není spojitá, ale má v jejich okolí konečnou variaci, platí* $\widehat{f}(x_0) = \dfrac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\right)$.

Poznámka 4. Ještě připomeňme užitečný vztah

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{1}$$

Příklad 5. Spočtěte Fourierův obraz funkce $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } |t| \le a, \\ 0 & \text{pro } |t| > a. \end{cases}$ $a \in \mathbb{R},\ a > 0.$

$\left(\text{Výsledek: } F(y) = \dfrac{2\sin(ay)}{y}.\right)$

Příklad 6. Spočtěte Fourierův obraz funkce $f(t) = \begin{cases} ae^{-t} & \text{pro } t \ge 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$

$\left(\text{Výsledek: } F(y) = \dfrac{a}{1+iy} = a\dfrac{1-iy}{1+y^2}.\right)$

Příklad 7. Spočtěte Fourierův obraz funkce $f(t) = e^{-a|t|}$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.
Řešení:

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} e^{-iyt}\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_{-b}^{b} e^{-a|t|} (\cos yt - i \sin yt)\, dt$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\int_0^b e^{-at}(\cos yt - i \sin yt)\, dt + \int_{-b}^0 e^{at}(\cos yt - i \sin yt)\, dt \right)$$

Druhý integrál transformujeme na první pomocí substituce: $t = -x$, $dt = -dx$. (Zároveň v druhém integrálu vyměníme dolní a horní mez v integrálu a tedy integrand musíme vynásobit číslem -1.) Potom platí

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\int_0^b e^{-at}(\cos yt - i \sin yt)\, dt + \int_0^b e^{-ax}(\cos yx + i \sin yx)\, dx \right)$$

$$= \lim_{b\to\infty} \left(\int_0^b e^{-at}(\cos yt - i \sin yt) + e^{-at}(\cos yt + i \sin yt)\, dt \right) = \lim_{b\to\infty} 2 \int_0^b e^{-at} \cos yt\, dt. \quad (2)$$

Protože integrand je spojitá funkce, primitivní funkce $\int e^{-at} \cos yt\, dt$ existuje. Najdeme ji pomocí per-partes.

$$\int e^{-at} \cos yt\, dt = \frac{-e^{-at} \cos yt}{a} - \frac{y}{a} \int e^{-at} \sin yt$$

$$= \frac{-e^{-at} \cos yt}{a} - \frac{y}{a} \left(\frac{-e^{-at} \sin yt}{a} + \frac{y}{a} \int e^{-at} \cos yt \right)$$

tedy

$$\left(1 + \frac{y^2}{a^2}\right) \int e^{-at} \cos yt\, dt = \frac{-e^{-at} \cos yt}{a} + \frac{y}{a^2} e^{-at} \sin yt = \frac{e^{-at}}{a^2} (y \sin yt - a \cos yt),$$

nebo-li

$$\int e^{-at} \cos yt\, dt = \frac{e^{-at}}{a^2 + y^2} (y \sin yt - a \cos yt). \quad (3)$$

Nakonec zkombinujeme rovnice (2) a (3) a dostaneme

$$F(y) = \lim_{b\to\infty} 2 \int_0^b e^{-at} \cos yt\, dt = 2 \lim_{b\to\infty} \left[\frac{e^{-at}}{a^2 + y^2} (y \sin yt - a \cos yt) \right]_0^b$$

$$= 2 \lim_{b\to\infty} \left(\frac{e^{-ab}}{a^2 + y^2} (y \sin yb - a \cos yb) + \frac{a}{a^2 + y^2} \right) = \frac{2a}{a^2 + y^2}.$$

Definice 8. Laplaceovým obrazem reálné funkce $f(t)$ (pokud příslušný integrál existuje) nazýváme funkci

$$L\{f(t)\} = F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt.$$

Zobrazení, které funkci f přiřazuje její Laplaceův obraz se nazývá Laplaceova transformace.

Definice 9. Vzorec pro inverzní Laplaceovu transformaci:

$$L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi\imath} \lim_{T\to\infty} \int_{\gamma-\imath T}^{\gamma+\imath T} F(p)e^{pt}\, dp,$$

kde γ je reálné číslo větší než reálná část všech singularit funkce $F(s)$.

Věta 10. *Jestliže je f je lokálně integrovatelná funkce (integrál z absolutní hodnoty funkce je konečný na každé uzavřené a omezené množině), pak Laplaceova transformace konverguje, jestliže integrál*

$$\int_0^\infty |f(t)e^{-pt}|\, dt$$

existuje a je konečný. Laplaceova transformace konverguje na tzv. polorovině konvergence, což je množina všech čísel, jejichž reálná část je větší (nebo větší rovna) než α. Konstanta α je nazývána poloměr konvergence. Je-li funkce f po částech spojitá, potom se $L^{-1}\{L\{f(t)\}\}$ může od $f(t)$ lišit pouze na množině míry nula.

Věta 11. *Vlastnosti Laplaceovy transformace. Mějme funkce $f(t)$ a $g(t)$ a jejich Laplaceovy transformace $F(p)$ a $G(p)$, potom (za předpokladu, že příslušné integrály konfergují) platí:*

- $af(t) + bg(t) \;\rightarrow\; aF(p) + bG(p)$,
- $tf(t) \;\rightarrow\; -F'(p)$,
- $t^n f(t) \;\rightarrow\; (-1)^n F^{(n)}(p)$,
- $f'(t) \;\rightarrow\; pF(p) - f(0)$,
- $f^{(n)}(t) \;\rightarrow\; p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$,
- $\dfrac{f(t)}{t} \;\rightarrow\; \displaystyle\int_p^\infty F(q)\, dq$,
- $\displaystyle\int_0^t f(s)\, ds \;\rightarrow\; \frac{F(p)}{p}$,
- $f(at) \;\rightarrow\; \dfrac{1}{|a|} F\left(\dfrac{p}{a}\right)$,
- $e^{at} f(t) \;\rightarrow\; F(p-a)$,
- $(f * g)(t) := \displaystyle\int_{-\infty}^\infty f(s)g(t-s)\, ds \;\rightarrow\; F(p)G(p)$,

Příklad 12. Postupně spočtěte Laplaceovy transformace následujících funkcí:

- $f(t) = a,\ a \in \mathbb{R}$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{a}{p} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > 0\right)$,
- $f(t) = Ae^{at},\ A, a \in \mathbb{R}$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{A}{p-a} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > a\right)$,
- $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t > a, \\ 0 & \text{pro } 0 \leq t \leq a. \end{cases}$ $\quad a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{e^{-ap}}{p} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > 0\right)$,
- $f(t) = Ae^{at} + Be^{bt},\ A, a, B, b \in \mathbb{R}$
  $\left(F(p) = \dfrac{A}{p-a} + \dfrac{B}{p-b} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > \max\{a, b\}\right)$,
- $f(t) = \cos at,\ a \in \mathbb{R}$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{p}{p^2 + a^2} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > 0\right)$,
- $f(t) = \sin at,\ a \in \mathbb{R}$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{a}{p^2 + a^2} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > 0\right)$,
- $f(t) = e^{bt} \cos at,\ a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{p-b}{(p-b)^2 + a^2} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > b\right)$,
- $f(t) = e^{bt} \sin at,\ a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{a}{(p-b)^2 + a^2} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > b\right)$,
- $f(t) = \dfrac{e^{at} - e^{bt}}{a-b},\ a, b \in \mathbb{R}$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{1}{(p-a)(p-b)} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > \max\{a, b\}\right)$,
- $f(t) = \dfrac{e^{at} - 1}{a},\ a \in \mathbb{R}$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{1}{(p-a)p} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > \max\{a, 0\}\right)$.

Příklad 13. Gama funkce je pro $x > 0$ definována předpisem $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$. Indukcí lze dokázat, že pro $n \in \mathbb{N}$ platí $\Gamma(n+1) = n!$. Pomocí gama funkce spočtěte Laplaceovy transformace následujících funkcí:

- $f(t) = t^a,\ a \in \mathbb{R},\ a > -1$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{\Gamma(a+1)}{p^{a+1}} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > 0\right)$,
- $f(t) = t^a \cos bt,\ a, b \in \mathbb{R},\ a > -1$
  $\left(F(p) = \dfrac{\Gamma(a+1)}{2} \dfrac{(p+ib)^{a+1} + (p-ib)^{a+1}}{(p^2+b^2)^{a+1}} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > 0\right)$,
- $f(t) = te^{a} \cos bt,\ a, b \in \mathbb{R},$ $\quad \left(F(p) = \dfrac{(p-a)^2 - b^2}{((p-a)^2 + b^2)^2} \quad \text{pro } \operatorname{Re} p > a\right)$.

Příklad 14. Hledejme řešení diferenciální rovnice $y'' + 5y' + 6y = 0$ s počátečními podmínkami $y(0) = 1$, $y'(0) = -3$ na intervalu $(0, \infty)$. K řešení využijeme Laplaceovy transformace. Pomocí per-partes postupně dostaneme

- $L\{y\} = Y$,
- $L\{y'\} = pY - y(0) = pY - 1$,
- $L\{y''\} = p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - p + 3$.

Takže Laplaceova transformace diferenciální rovnice je:

$$p^2Y - p + 3 + 5pY - 5 + 6Y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad Y = \frac{p+2}{p^2 + 5p + 6} = \frac{1}{p+3}.$$

Nakonec aplikujeme inverzní (zpětnou) Laplaceovu transformaci a dostaneme výsledek $y(t) = e^{-3t}$.

Příklad 15. Hledejme řešení diferenciální rovnice $y'' + 2y' + y = 9e^{2t}$ s počátečními podmínkami $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ na intervalu $(0, \infty)$. $\quad (y(t) = -e^{-t} - 3te^{-t} + e^{2t})$