Cvičení 4

Příklad 1. Integrujte funkci $f(x,y) = xy$ přes parabolickou úseč ohraničenou křivkami $y = x - 4$ a $y^2 = 2x$.

$$\left(\int_{-2}^{4}\int_{y^2/2}^{y+4} xy\,dx\,dy = \int_0^2\int_{-\sqrt{2x}}^{\sqrt{2x}} xy\,dy\,dx + \int_2^8\int_{x-4}^{\sqrt{2x}} xy\,dy\,dx = 90\right)$$

Příklad 2. Změňte pořadí integrace v integrálu $\displaystyle\int_0^{2a}\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dy\,dx$, kde $(a > 0)$.

$$\left(\int_0^a\int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^a\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy + \int_0^{2a}\int_{y^2/2a}^{2a} f(x,y)\,dx\,dy\right)$$

Příklad 3. Integrujte funkci $f(x,y) = x^2 + y$ přes oblast ohraničenou křivkami $y = \dfrac{x}{2}$, $y = 2x$ a $xy = 2$ pro $x \geq 0$.

$$\left(\int_0^1\int_{x/2}^{2x} x^2 + y\,dy\,dx + \int_1^2\int_{x/2}^{2/x} x^2 + y\,dy\,dx = \frac{17}{6}\right)$$

Příklad 4. Integrujte funkci $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2$ přes oblast A ohraničenou nerovnicemi $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ a $y \geq |x|$.

Nejprve transformujeme oblast i funkci f do polárních souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad J = r, \qquad \text{pro } r > 0,\ 2\pi > \varphi \geq 0.$$

Potom máme

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \quad\Leftrightarrow\quad 1 \leq r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi \leq 4 \quad\Leftrightarrow\quad 1 \leq r \leq 2,$$

$$y \geq |x| \quad\Leftrightarrow\quad r\sin\varphi \geq |r\cos\varphi| \quad\Leftrightarrow\quad \sin\varphi \geq |\cos\varphi| \quad\Leftrightarrow\quad \frac{3\pi}{4} \geq \varphi \geq \frac{\pi}{4}.$$

Tedy

$$\int\!\!\int_A 2x^2 + 2y^2\,dx\,dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4}\int_1^2 2r^2 r\,dr\,d\varphi = \frac{15\pi}{4}.$$

Příklad 5. Spočítejte integrál $\displaystyle\int\!\!\int_A r\sin\varphi\,dr\,d\varphi$. Oblast A je určena plochou ohraničenou křivkami $r = 1$ a $r = 2 + \cos\varphi$ (v polárních souřadnicích).

$$\left(\int_0^{2\pi}\int_1^{2+\cos\varphi} r\sin\varphi\,dr\,d\varphi = 0\right)$$

Příklad 6. Spočítejte obsah oblasti A ohraničené hyperbolami $xy = a$, $xy = b$, kde $0 < a < b$ a parabolami $y^2 = mx$, $y^2 = nx$, kde $0 < m < n$.

Provedeme následující transformaci souřadnic:

$$u = xy, \qquad v = \frac{y^2}{x}.$$

Výhodou této transformace je, že původní (složitě popsatelná) oblast se transformuje na pravoúhelník. Ještě potřebujeme spočítat Jakobián této transformace. Vzhledem k tomu, že výše uvedený předpis popisuje inverzní transformaci souřadnic a že Jakobián transformace se rovná převrácené hodnotě Jakobiánu inverzní transformace, je v tomto případě výhodnější spočítat Jakobián inverzní transformace. (Pokud bychom chtěli počítat Jakobián transformace museli bychom z výše uvedeného předpisu nejprve vyjádřit x a y jako funkce proměnných u a v.)

$$\frac{1}{J} = \frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = \frac{2y^2}{x} + \frac{y^2}{x} = \frac{3y^2}{x} = 3v.$$

Tedy

$$S = \int\!\!\int_A dx\,dy = \frac{1}{3}\int_a^b \int_m^n \frac{1}{v}\,dv\,du = \frac{b-a}{3}\ln\frac{n}{m}.$$

Příklad 7. Vypočtěte integrál $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dy\,dx$, kde $a > 0$. Návod: nejprve integrujte podle z a poté transformujte do polárních souřadnic.

$$\left(\frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr\,d\varphi = \frac{8a^2}{9}.\right)$$

Příklad 8. Vypočtěte integrál $\int\!\!\int\!\!\int_A x^2 + y^2\,dz\,dy\,dx$, kde integrační oblast A je ohraničena plochami $x^2 + y^2 = 2z$ a $z = 2$. Návod: transformujte do cylindrických souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = u, \quad J = r \quad \text{pro } r > 0,\ 2\pi > \varphi \geq 0,\ u \in \mathbb{R}.$$

$$\left(\int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2/2}^2 r^3\,du\,d\varphi\,dr = \frac{16\pi}{3}\right)$$

Příklad 9. Vypočtěte integrál $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2\,dz\,dy\,dx.$

Oblast i integrand transformujeme do sférických souřadnic:

$$x = r\cos\varphi\sin\psi, \qquad y = r\sin\varphi\sin\psi, \qquad z = r\cos\psi, \qquad J = r^2\sin\psi$$

$$\text{pro } r > 0,\ 2\pi > \varphi \geq 0,\ \pi > \psi \geq 0.$$

Nyní potřebujeme najít meze nových souřadnic. Z integračních mezí třetího integrálu plyne, že $z = r\cos\psi > 0$, tedy $\frac{\pi}{2} \geq \psi \geq 0$ a dále dostaneme

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \quad \Leftrightarrow \quad r^2\sin^2\psi \leq r^2\cos^2\psi \leq 2 - r^2\sin^2\psi$$

$$\Leftrightarrow \quad 2r^2\sin^2\psi \leq r^2\cos^2\psi + r^2\sin^2\psi = r^2 \leq 2,$$

tedy jednak $r \leq \sqrt{2}$ a jednak $2\sin^2\psi \leq 1$, nebo-li $\frac{\pi}{4} \geq \psi \geq 0$. Z integračních mezí druhého integrálu dostaneme

$$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq r\sin\varphi\sin\psi \leq \sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi\sin^2\psi},$$

protože $r > 0$ a $\sin\psi \geq 0$, musí být i $\sin\varphi \geq 0$, nebo-li $\pi \geq \varphi \geq 0$. Druhá nerovnost

$$r\sin\varphi\sin\psi \leq \sqrt{1 - r^2\cos^2\varphi\sin^2\psi} \quad \Leftrightarrow \quad r^2\sin^2\varphi\sin^2\psi \leq 1 - r^2\cos^2\varphi\sin^2\psi$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2\sin^2\varphi\sin^2\psi + r^2\cos^2\varphi\sin^2\psi = r^2\sin^2\psi \leq 1$$

je pro $r \leq \sqrt{2}$, $\frac{\pi}{4} \geq \psi \geq 0$ splněna vždy. Zbývá vyšetřit meze prvního integrálu

$$0 \leq x \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq r\cos\varphi\sin\psi \leq 1,$$

protože $r > 0$ a $\sin\psi \geq 0$, musí být i $\cos\varphi \geq 0$. Zkombinujeme-li to s nerovnostmi $\pi \geq \varphi \geq 0$, dostaneme $\frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq 0$. Druhá nerovnost je vždy splněna.

Celkem jsme tedy zjistili:

$$r \leq \sqrt{2}, \qquad \frac{\pi}{4} \geq \psi \geq 0, \qquad \frac{\pi}{2} \geq \varphi \geq 0.$$

$$\left(\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\pi/2} r^4\cos^2\psi\sin\psi\,d\varphi\,d\psi\,dr = \frac{\pi(2\sqrt{2}-1)}{15}. \right)$$

Příklad 10. Vypočtěte integrál $\int\int\int_A \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dz\,dy\,dx$, kde integrační oblast A je ohraničena elipsoidem určeným rovnicí $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. Návod: použijte zobecněné sférické souřadnice

$$x = ar\cos\varphi\sin\psi, \qquad y = br\sin\varphi\sin\psi, \qquad z = cr\cos\psi, \qquad J = abcr^2\sin\psi$$

$$\text{pro } r > 0,\ 2\pi > \varphi \geq 0,\ \pi > \psi \geq 0.$$

$$\left(\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1-r^2}abcr^2\sin\psi\,d\varphi\,d\psi\,dr = \frac{abc\pi^2}{4}\right)$$