Matematika 1B.
DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Petr Salač a Jiří Hozman
Fakulta přírodovědně-humanitní a pedagogická
Technická univerzita v Liberci
petr.salac@tul.cz
jiri.hozman@tul.cz

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.
Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.

Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.

Rovnice, v níž se vyskytují derivace neznámé funkce podle více proměnných, nazýváme **parciální diferenciální rovnice**.

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.
Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.
Rovnice, v níž se vyskytují derivace neznámé funkce podle více proměnných, nazýváme **parciální diferenciální rovnice**.
Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v dané rovnici vyskytuje.

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.
Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.
Rovnice, v níž se vyskytují derivace neznámé funkce podle více proměnných, nazýváme **parciální diferenciální rovnice**.
Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v dané rovnici vyskytuje.

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu.

Obyčejné diferenciální rovnice

Základní pojmy

Diferenciální rovnicí rozumíme rovnici, ve které je neznámou veličinou funkce jedné nebo více proměnných a ve které se vyskytují derivace této neznámé funkce.
Je-li neznámou funkcí funkce pouze jedné proměnné, mluvíme o **obyčejné diferenciální rovnici**.
Rovnice, v níž se vyskytují derivace neznámé funkce podle více proměnných, nazýváme **parciální diferenciální rovnice**.
Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v dané rovnici vyskytuje.

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu.

Řešením diferenciální rovnice (v určitém oboru proměnné x) nazýváme každou takovou funkci $y(x)$, která spolu se svými derivacemi splňuje uvažovanou rovnici identicky (tj. pro všechna x z uvažovaného oboru).

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a jejím řešením je např. funkce

$$y = x^2$$

a to v R.

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a jejím řešením je např. funkce

$$y = x^2$$

a to v R. Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad
Rovnice
$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$
je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a jejím řešením je např. funkce
$$y = x^2$$
a to v R. Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme
$$L = x^3.2 + (2x)^3 - x.x^2 - 9x^3 = 2x^3 + 8x^3 - x^3 - 9x^3 \ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad
Rovnice

$$x^3y'' + y'^3 - xy - 9x^3 = 0$$

je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu a jejím řešením je např. funkce

$$y = x^2$$

a to v R. Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = x^3.2 + (2x)^3 - x.x^2 - 9x^3 = 2x^3 + 8x^3 - x^3 - 9x^3 \; .$$

Graf řešení $y(x)$ nazýváme **integrální křivkou** diferenciální rovnice.

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x\ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x \ .$$

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad
Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x\ .$$

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = -9\sin 3x + 9\sin 3x\ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x \ .$$

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = -9 \sin 3x + 9 \sin 3x \ .$$

Také ale

$$y = 7 \sin 3x \ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad

Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x \ .$$

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = -9\sin 3x + 9\sin 3x \ .$$

Také ale

$$y = 7\sin 3x \ .$$

Také ale

$$y = 8\cos 3x \ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad
Řešení rovnice

$$y'' + 9y = 0$$

je např. funkce

$$y = \sin 3x\ .$$

Neboť dosadíme-li do levé strany, dostaneme

$$L = -9\sin 3x + 9\sin 3x\ .$$

Také ale

$$y = 7\sin 3x\ .$$

Také ale

$$y = 8\cos 3x\ .$$

Obecně

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení,

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení, které v daném bodě x_0
splňuje tzv. **počáteční podmínky**

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení, které v daném bodě x_0
splňuje tzv. **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = b_1,\ y'(x_0) = b_2,\ y^{(2)}(x_0) = b_3,\ \dots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n,$$

kde b_j , $j = 1, 2, \dots, n$ jsou daná reálná čísla.

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení, které v daném bodě x_0
splňuje tzv. **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = b_1,\ y'(x_0) = b_2,\ y^{(2)}(x_0) = b_3,\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n,$$

kde b_j , $j = 1,\, 2,\, \ldots, n$ jsou daná reálná čísla.

Cauchyova úloha:

Obyčejné diferenciální rovnice

V praktických úlohách většinou nepotřebujeme všechna řešení, ale pouze speciální řešení, které v daném bodě x_0
splňuje tzv. **počáteční podmínky**

$$y(x_0) = b_1,\ y'(x_0) = b_2,\ y^{(2)}(x_0) = b_3,\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = b_n,$$

kde b_j , $j = 1, 2, \ldots, n$ jsou daná reálná čísla.

Cauchyova úloha:
Hledáme řešení y rovnice

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

splňující počáteční podmínky

$$y(x_0) = b_1,\ y'(x_0) = b_2,\ y^{(2)}(x_0) = b_3,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = b_n.$$

Příklad:

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$
$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3\,.$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3 \, .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x \, .$$

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3\ .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\ .$$

Derivujeme toto řešení

$$y' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x\ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2, \;\; y'(0) = 3\ .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\ .$$

Derivujeme toto řešení

$$y' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x\ .$$

Dosadíme $x = 0$ a dostaneme

$$2 = C_1.0 + C_2.1$$

$$3 = 3C_1.1 - 3C_2.0$$

Obyčejné diferenciální rovnice

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2,\ \ y'(0) = 3\ .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\ .$$

Derivujeme toto řešení

$$y' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x\ .$$

Dosadíme $x = 0$ a dostaneme

$$2 = C_1.0 + C_2.1$$

$$3 = 3C_1.1 - 3C_2.0$$

Odtud $C_1 = 1,\ C_2 = 2$.

Příklad:

$$y'' + 9y = 0$$

$$y(0) = 2,\ \ y'(0) = 3\ .$$

Víme, že obecné řešení je

$$y = C_1 \sin 3x + C_2 \cos 3x\ .$$

Derivujeme toto řešení

$$y' = 3C_1 \cos 3x - 3C_2 \sin 3x\ .$$

Dosadíme $x = 0$ a dostaneme

$$2 = C_1.0 + C_2.1$$

$$3 = 3C_1.1 - 3C_2.0$$

Odtud $C_1 = 1,\ C_2 = 2$. Tedy řešení Cauchyovy úlohy je

$$y = \sin 3x + 2\cos 3x\ .$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \; . \tag{1}$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \ . \tag{1}$$

Budeme uvažovat pouze rovnice, které lze rozřešit vzhledem k derivaci, tj.

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \; . \tag{1}$$

Budeme uvažovat pouze rovnice, které lze rozřešit vzhledem k derivaci, tj.

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Někdy se zapisuje v tzv. diferenciálním tvaru

$$P(x, y)\, dx + R(x, y)\, dy = 0. \tag{3}$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \; . \tag{1}$$

Budeme uvažovat pouze rovnice, které lze rozřešit vzhledem k derivaci, tj.

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Někdy se zapisuje v tzv. diferenciálním tvaru

$$P(x, y)\, dx + R(x, y)\, dy = 0. \tag{3}$$

Užijeme-li, že $y' = \frac{dy}{dx}$, pak lze (3) přepsat na

$$y' = -\frac{P(x, y)}{R(x, y)}$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Obecnou diferenciální rovnici 1. řádu lze napsat ve tvaru

$$F(x, y, y') = 0 \; . \tag{1}$$

Budeme uvažovat pouze rovnice, které lze rozřešit vzhledem k derivaci, tj.

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Někdy se zapisuje v tzv. diferenciálním tvaru

$$P(x, y)\, dx + R(x, y)\, dy = 0. \tag{3}$$

Užijeme-li, že $y' = \frac{dy}{dx}$, pak lze (3) přepsat na

$$y' = -\frac{P(x, y)}{R(x, y)}$$

a naopak (2) na tvar

$$dy - f(x, y)\, dx = 0.$$

Geometrický význam rovnice (2)

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Geometrický význam rovnice (2)

Graf neznámé funkce y je nějaká křivka v rovině xy.

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Geometrický význam rovnice (2)

Graf neznámé funkce y je nějaká křivka v rovině xy. Rovnice (2) nám říká, že v každém bodě roviny je dána směrnice tečny hledané křivky procházející daným bodem.

Geometrický význam rovnice (2)

Graf neznámé funkce y je nějaká křivka v rovině xy. Rovnice (2) nám říká, že v každém bodě roviny je dána směrnice tečny hledané křivky procházející daným bodem. Můžeme tedy zakreslit v libovolném bodě (x, y) tečnu se směrnicí $k = y' = f(x, y)$ (tzv. směrové pole).

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0)

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y)\ ,$$

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y)\ ,$$

nechť $f(x, y)$ splňuje následující podmínky

Obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y) \, ,$$

nechť $f(x, y)$ splňuje následující podmínky
a) $f(x, y)$ je spojitá funkce dvou proměnných na

$$O = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y) ,$$

nechť $f(x, y)$ splňuje následující podmínky
a) $f(x, y)$ je spojitá funkce dvou proměnných na

$$O = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

b)

$$\exists L > 0\, \forall (x, y),\, (x, y_1) \in O \qquad |f(x, y_1) - f(x, y)| \leq L|y_1 - y| ,$$

Věta 1. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť je dán bod (x_0, y_0) a rovnice

$$y' = f(x, y) \ ,$$

nechť $f(x, y)$ splňuje následující podmínky
a) $f(x, y)$ je spojitá funkce dvou proměnných na

$$O = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$$

b)

$$\exists L > 0 \, \forall (x, y),\, (x, y_1) \in O \qquad |f(x, y_1) - f(x, y)| \leq L|y_1 - y| \ ,$$

potom v jistém okolí bodu x_0 existuje jediné řešení $y = y(x)$ dané rovnice takové, že $y(x_0) = y_0$.

Separovatelné ODR.

Separovatelné ODR.

Diferenciální rovnici

Separovatelné ODR.

Diferenciální rovnici

$$y' = f(x).g(y) \ , \tag{4}$$

kde f a g jsou funkce jedné proměnné, nazýváme **separovatelnou ODR**.

Separovatelné ODR.

Řešení

Separovatelné ODR.

Řešení

1) Je-li $g(y) \neq 0$ separujeme proměnné

$$\frac{1}{g(y)}y' = f(x)$$

Separovatelné ODR.

Řešení

1) Je-li $g(y) \neq 0$ separujeme proměnné

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x)$$

2) integrujeme obě strany podle x

$$\int \frac{1}{g(y)} y' \, dx = \int f(x) \, dx$$

Separovatelné ODR.

Řešení

1) Je-li $g(y) \neq 0$ separujeme proměnné

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x)$$

2) integrujeme obě strany podle x

$$\int \frac{1}{g(y)} y' \, dx = \int f(x) \, dx$$

$$\downarrow$$

$$G(y) = F(x) + C$$

(implicitně definované řešení $y = y(x)$)

Separovatelné ODR.

Řešení

1) Je-li $g(y) \neq 0$ separujeme proměnné

$$\frac{1}{g(y)} y' = f(x)$$

2) integrujeme obě strany podle x

$$\int \frac{1}{g(y)} y' \, dx = \int f(x) \, dx$$

$$\downarrow$$

$$G(y) = F(x) + C$$

(implicitně definované řešení $y = y(x)$)

3) Je-li to možné, přejdeme k explicitnímu vyjádření

$$y = H(x) \, .$$

Příklad

$$y' = \frac{y+1}{x}$$

Separovatelné ODR.

Příklad

$$y' = \frac{y+1}{x}$$

Příklad

Řešte Cauchyovu úlohu

$$y' = -\frac{x(y^2-1)}{y(x^2-1)} \qquad y(2) = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

b) **Homogenní ODR.**

Separovatelné ODR.

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

Separovatelné ODR.

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' = f(\frac{y}{x}) \,, \tag{5}$$

kde f je spojitá funkce, nazýváme **homogenní ODR**.

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{5}$$

kde f je spojitá funkce, nazýváme **homogenní ODR**.

Řešení

Separovatelné ODR.

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{5}$$

kde f je spojitá funkce, nazýváme **homogenní ODR**.

Řešení
Použitím substituce $z = \frac{y}{x}$, kde z je nová neznámá funkce proměnné x, $D_z = R \setminus \{0\}$, převedeme homogenní ODR na separovatelnou ODR. Tu vyřešíme a z jejího řešení $z = z(x)$, pak spočítáme řešení $y = y(x)$ původní ODR.

Separovatelné ODR.

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' = f(\frac{y}{x}) \,, \tag{5}$$

kde f je spojitá funkce, nazýváme **homogenní ODR**.

Řešení
Použitím substituce $z = \frac{y}{x}$, kde z je nová neznámá funkce proměnné x, $D_z = R \setminus \{0\}$, převedeme homogenní ODR na separovatelnou ODR. Tu vyřešíme a z jejího řešení $z = z(x)$, pak spočítáme řešení $y = y(x)$ původní ODR.

Příklad

b) **Homogenní ODR.**
Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' = f(\frac{y}{x}) \,, \tag{5}$$

kde f je spojitá funkce, nazýváme **homogenní ODR**.

Řešení
Použitím substituce $z = \frac{y}{x}$, kde z je nová neznámá funkce proměnné x, $D_z = R \setminus \{0\}$, převedeme homogenní ODR na separovatelnou ODR. Tu vyřešíme a z jejího řešení $z = z(x)$, pak spočítáme řešení $y = y(x)$ původní ODR.

Příklad
Řešte diferenciální rovnici

$$y' = e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \,.$$

Lineární ODR 1. řádu.

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{6}$$

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{6}$$

kde p, q jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**.

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{6}$$

kde $p, \ q$ jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$,

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{6}$$

kde $p, \ q$ jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (6) **homogenní rovnicí** (někdy též rovnicí bez pravé strany),

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x)\ , \tag{6}$$

kde $p,\ q$ jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**. Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (6) **homogenní rovnicí** (někdy též rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (6) je **nehomogenní rovnice** (někdy rovnice s pravou stranou).

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{6}$$

kde p, q jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (6) **homogenní rovnicí** (někdy též rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (6) je **nehomogenní rovnice** (někdy rovnice s pravou stranou).
(Termín „homogenní“ zde má zcela jiný význam než v bodě b))

Lineární ODR 1. řádu.

Diferenciální rovnici, kterou lze přepsat do tvaru

$$y' + p(x)y = q(x) \ , \tag{6}$$

kde $p,\ q$ jsou funkce spojité v intervalu (a,b), nazýváme **lineární ODR 1. řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (6) **homogenní rovnicí** (někdy též rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (6) je **nehomogenní rovnice** (někdy rovnice s pravou stranou).
(Termín „homogenní“ zde má zcela jiný význam než v bodě b))
Diferenciální rovnici (6) je přiřazena homogenní lineární ODR

$$y' + p(x)y = 0 \ . \tag{7}$$

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ ,\ \ x \in (a, b)\ ,$$

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:
1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ , \ \ x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:
1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ , \quad x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.
2) Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení y_p rovnice (6)

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\, dx}\ , \quad x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.

2) Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení y_p rovnice (6) (tj. libovolné konkrétní řešení (6) v intervalu (a,b)).

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ , \quad x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.

2) Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení y_p rovnice (6) (tj. libovolné konkrétní řešení (6) v intervalu (a,b)).

Řešení y_p hledáme ve tvaru

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:
1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ , \ \ x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.
2) Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení y_p rovnice (6) (tj. libovolné konkrétní řešení (6) v intervalu (a,b)).
Řešení y_p hledáme ve tvaru

$$y_p = k(x).e^{-\int p(x)\,dx}\ , \tag{8}$$

Lineární ODR 1. řádu.

Řešení:

1) Separací proměnných nalezneme všechna řešení y_h homogenní lineární ODR (7) ve tvaru

$$y_h = C.e^{-\int p(x)\,dx}\ , \quad x \in (a,b)\ ,$$

kde $C \in R$ libovolná konstanta.

2) Metodou variace konstanty nalezneme partikulární řešení y_p rovnice (6) (tj. libovolné konkrétní řešení (6) v intervalu (a,b)).

Řešení y_p hledáme ve tvaru

$$y_p = k(x).e^{-\int p(x)\,dx}\ , \tag{8}$$

kde k je nějaká neznámá funkce.

Lineární ODR 1. řádu.

Výraz (8) derivujeme a dosadíme do (6), čímž dostaneme

Lineární ODR 1. řádu.

Výraz (8) derivujeme a dosadíme do (6), čímž dostaneme

$$k'(x) = q(x).e^{\int p(x)\, dx} \ ,$$

Lineární ODR 1. řádu.

Výraz (8) derivujeme a dosadíme do (6), čímž dostaneme

$$k'(x) = q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ ,$$

integrací určíme

$$k(x) = \int q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ , \qquad x \in (a, b). \tag{9}$$

Lineární ODR 1. řádu.

Výraz (8) derivujeme a dosadíme do (6), čímž dostaneme

$$k'(x) = q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ ,$$

integrací určíme

$$k(x) = \int q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ , \qquad x \in (a,b). \tag{9}$$

Dosazením (9) do (8) dostaneme partikulární řešení.

Lineární ODR 1. řádu.

Výraz (8) derivujeme a dosadíme do (6), čímž dostaneme

$$k'(x) = q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ ,$$

integrací určíme

$$k(x) = \int q(x).e^{\int p(x)\,dx}\ , \qquad x \in (a,b). \tag{9}$$

Dosazením (9) do (8) dostaneme partikulární řešení.
3) Sestavíme obecné řešení

$$y_o = y_h + y_p\ .$$

Lineární ODR 1. řádu.

Příklad:
Řešte diferenciální rovnici

$$y' - \frac{y}{2(x+1)} = e^x \sqrt{x+1}\,.$$

Lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{10}$$

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{10}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \; .$$

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{10}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Věta 2.

Lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{10}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Věta 2.

Jestliže p a q jsou spojité funkce v intervalu (a, b),

Lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{10}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Věta 2.

Jestliže p a q jsou spojité funkce v intervalu (a, b), potom má Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu právě jedno řešení pro každé $x_0 \in (a, b), \ y_0 \in R$.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{10}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Věta 2.

Jestliže p a q jsou spojité funkce v intervalu (a, b), potom má Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu právě jedno řešení pro každé $x_0 \in (a, b),\ y_0 \in R$.

Příklad.

Lineární ODR 1. řádu.

Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu.

Hledáme řešení y rovnice

$$y' + p(x).y = q(x) \tag{10}$$

splňující počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0 \ .$$

Věta 2.

Jestliže p a q jsou spojité funkce v intervalu (a, b), potom má Cauchyova úloha pro lineární ODR 1. řádu právě jedno řešení pro každé $x_0 \in (a, b), \ y_0 \in R$.

Příklad.

Řešte Cauchyovu úlohu

$$y' - \frac{y}{2(x+1)} = e^x\sqrt{x+1} \qquad y(0) = 0.$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{11}$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{11}$$

kde $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b),

Lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{11}$$

kde $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.

Lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{11}$$

kde $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$,

Lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{11}$$

kde $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (11) **homogenní rovnicí**

Lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{11}$$

kde $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (11) **homogenní rovnicí** (nebo rovnicí bez pravé strany),

Lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{11}$$

kde $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (11) **homogenní rovnicí** (nebo rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (11) je **nehomogenní rovnice**

Lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{11}$$

kde $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (11) **homogenní rovnicí** (nebo rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (11) je **nehomogenní rovnice** (rovnice s pravou stranou).

Lineární ODR n-tého řádu.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = q(x), \tag{11}$$

kde $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou funkce spojité v intervalu (a, b), nazýváme **lineární ODR n-tého řádu**.
Jestliže pro všechna $x \in (a, b)$ platí $q(x) = 0$, nazýváme rovnici (11) **homogenní rovnicí** (nebo rovnicí bez pravé strany), v opačném případě říkáme, že (11) je **nehomogenní rovnice** (rovnice s pravou stranou). Diferenciální rovnici (11) je přiřazena homogenní lineární ODR n-tého řádu

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' +$$

$$+p_n(x)y = 0. \tag{12}$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)

Lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu (a, b),

Lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \ldots ,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots ,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.
Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b),

Lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.
Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b), které vyhovuje podmínkám

Lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.
Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b), které vyhovuje podmínkám

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,\ y''(x_0) = \alpha_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}\,.$$

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.
Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b), které vyhovuje podmínkám

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,\ y''(x_0) = \alpha_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}\,.$$

(Hledání takového řešení říkáme opět řešení Cauchyovy úlohy,

Lineární ODR n-tého řádu.

Věta 3. (o existenci a jednoznačnosti řešení Cauchyovy úlohy)
Nechť funkce $p_1,\ p_2, \dots,\ p_n, q$ jsou spojité v intervalu $(a, b),\ x_0 \in (a, b)$ a nechť $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_{n-1}$ jsou libovolná reálná čísla.
Potom existuje právě jedno řešení $y = y(x)$ diferenciální rovnice (11) v intervalu (a, b), které vyhovuje podmínkám

$$y(x_0) = \alpha_0,\ y'(x_0) = \alpha_1,\ y''(x_0) = \alpha_2,\ \dots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}\,.$$

(Hledání takového řešení říkáme opět řešení Cauchyovy úlohy, příslušným podmínkám opět říkáme počáteční podmínky.)

Lineární ODR n-tého řádu.

Homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Lineární ODR n-tého řádu.

Homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{13}$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{13}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ nazýváme **homogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

Lineární ODR n-tého řádu.

Homogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{13}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ nazýváme **homogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.
Rovnici (13) přiřadíme algebraickou rovnici

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0\ . \tag{14}$$

Této rovnici říkáme **charakteristická rovnice ODR (13)**.
Víme, že rovnice (14) má n komplexních kořenů (ty nemusí být navzájem různé, některé kořeny mohou být několikanásobné).

Lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

Lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

Lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

Lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

Návod:
1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.
a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a + ib,\ (b \neq 0)$ je m-násobný imaginární kořen rovnice (14),

Lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a+ib,\ (b \neq 0)$ je m-násobný imaginární kořen rovnice (14), potom m-násobným kořenem rovnice (14) je i číslo $a-ib$.

Lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a + ib,\ (b \neq 0)$ je m-násobný imaginární kořen rovnice (14), potom m-násobným kořenem rovnice (14) je i číslo $a - ib$.

Těmto 2m kořenům přiřadíme následujících 2m funkcí:

Lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \dots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a+ib,\ (b\neq 0)$ je m-násobný imaginární kořen rovnice (14), potom m-násobným kořenem rovnice (14) je i číslo $a-ib$.

Těmto 2m kořenům přiřadíme následujících 2m funkcí:

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ x^2e^{ax}\cos bx,\ \dots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx,$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Návod:

1) Každému kořenu charakteristické rovnice (14) přiřadíme jednu funkci tak, aby příslušných n funkcí tvořilo tzv. **fundamentální systém řešení ODR (13)**.

a) K-násobnému reálnému kořenu λ rovnice (14) přiřadíme těchto k funkcí:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2e^{\lambda x},\ \ldots,\ x^{k-1}e^{\lambda x}.$$

b) Jestliže $a + ib,\ (b \neq 0)$ je m-násobný imaginární kořen rovnice (14), potom m-násobným kořenem rovnice (14) je i číslo $a - ib$.

Těmto 2m kořenům přiřadíme následujících 2m funkcí:

$$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ x^2e^{ax}\cos bx,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\cos bx,$$

$$e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ x^2e^{ax}\sin bx,\ \ldots,\ x^{m-1}e^{ax}\sin bx.$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li $y_1, y_2, \ldots y_n$ funkce z fundamentálního systému,

Lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\ldots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

Lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\dots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\dots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

kde C_1, C_2, $\dots$, C_n jsou libovolné konstanty.

Lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\dots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

kde C_1, C_2, $\dots$, C_n jsou libovolné konstanty.

Příklad:

Lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li $y_1, y_2, \ldots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

kde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ jsou libovolné konstanty.

Příklad:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li y_1, y_2, $\dots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

kde C_1, C_2, $\dots$, C_n jsou libovolné konstanty.

Příklad:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Označíme-li $y_1, y_2, \dots y_n$ funkce z fundamentálního systému, dostaneme řešení (13) ve tvaru lineární kombinace

$$y_h(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i \ ,$$

kde $C_1, C_2, \dots, C_n$ jsou libovolné konstanty.

Příklad:

$$y'' + 5y' + 6y = 0$$

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

$$y'' + y = 0$$

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

Lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.

Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \qquad (15)$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{15}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule,

Lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{15}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.

Lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{15}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.
Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

Lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{15}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.
Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

$$y_o = y_h + y_p\ ,$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \qquad (15)$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.
Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

$$y_o = y_h + y_p\ ,$$

kde y_p je tzv. **partikulární řešení** (konkrétní řešení) rovnice (15)

Lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \tag{15}$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.
Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

$$y_o = y_h + y_p \ ,$$

kde y_p je tzv. **partikulární řešení** (konkrétní řešení) rovnice (15) a y_h je řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15).

Lineární ODR n-tého řádu.

Nehomogenní lineární ODR s konstantními koeficienty.
Diferenciální rovnici

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = q(x), \qquad (15)$$

kde $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n \in R$ a q je spojitá funkce, která není identicky rovna nule, nazýváme **nehomogenní lineární ODR n-tého řádu s konstantními koeficienty**.
Obecné řešení rovnice (15) dostaneme ve tvaru

$$y_o = y_h + y_p\ ,$$

kde y_p je tzv. **partikulární řešení** (konkrétní řešení) rovnice (15) a y_h je řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15).
Partikulární řešení nalezneme tzv. variací konstant.

Variace konstant.

Variace konstant.
Jestliže funkce

Variace konstant.
Jestliže funkce $y_1, y_2, \ldots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15),

Lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce $y_1,\, y_2,\, \ldots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

Variace konstant.

Jestliže funkce $y_1, y_2, \ldots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{16}$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce $y_1, y_2, \ldots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{16}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.

Lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce y_1, y_2, $\ldots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{16}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.
Neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

Lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce y_1, y_2, $\ldots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{16}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.
Neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce $y_1, y_2, \ldots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{16}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.
Neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce y_1, y_2, $\dots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{16}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.
Neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Variace konstant.
Jestliže funkce y_1, y_2, $\dots y_n$ tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice přiřazené ODR (15), potom má rovnice (15) partikulární řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n \ , \tag{16}$$

kde $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ jsou neznámé funkce.
Neznámé funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\dots$, $C_n(x)$ dostaneme řešením soustavy

$$C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \cdots + C_n'(x)y_n = 0$$

$$C_1'(x)y_1' + C_2'(x)y_2' + \cdots + C_n'(x)y_n' = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} = 0$$

$$C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \cdots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} = q(x)$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C'_1(x)$, $C'_2(x)$, $\ldots$, $C'_n(x)$

Lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$.

Lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p.

Lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p.

Příklad.

Lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, ..., $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, ..., $C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p.

Příklad.

$$y'' + 5y' + 6y = e^x$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p.

Příklad.

$$y'' + 5y' + 6y = e^x$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^x,$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Touto soustavou rovnic jsou jednoznačně určeny funkce $C_1'(x)$, $C_2'(x)$, $\ldots$, $C_n'(x)$ a jejich integrací získáme funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$, $\ldots$, $C_n(x)$. Pak dosazením do (16) vypočítáme y_p.

Příklad.

$$y'' + 5y' + 6y = e^x$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^x,$$

$$y'' + y = e^x, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2\ .$$

Lineární ODR n-tého řádu.

Uvažujme nehomogenní LDR n-tého řádu s konstantními koeficienty, kde funkce na pravé straně je speciálního typu

$$q(x) = e^{ax}(P(x)\cos(bx) + Q(x)\sin(bx)), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

kde $P(x), Q(x)$ jsou dané polynomy.

V tomto případě můžeme použít při hledání partikulárního řešení $y_p(x)$ metodu odhadu pro speciální pravou stranu, kdy pokládáme

$$y_p(x) = x^k e^{ax}(R(x)\cos(bx) + S(x)\sin(bx)), \quad a, b \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}_0$$

kde $R(x), S(x)$ jsou polynomy s dosud neurčenými koeficienty, jejichž stupeň je roven většímu ze stupňů polynomů $P(x), Q(x)$.

Lineární ODR n-tého řádu.

Hledané partikulárního řešení $y_p(x)$ má formálně stejný tvar jako pravá strana $b(x)$ až na činitel x^k. Čísla $a, b \in \mathbb{R}$ jsou dána pravou stranou, polynomy $R(x), S(x)$ učíme metodou neučitých koefcientů (dosadíme-li je do dané LDR) a číslo $k \in \mathbb{N}_0$ určíme podle násobnosti kořene $\alpha = a \pm ib$ v charakteristické rovnici $\chi_n(\lambda) = 0$ příslušné k přiřazené homogenní LDR. Tedy:

- $k = 0$, není-li α kořenem $\chi_n(\lambda) = 0$,
- $k =$ násobnost kořene α, je-li α kořenem $\chi_n(\lambda) = 0$.

Příklad: *Určete obecná řešení pro následující nehomogenní LDR*

$$a)\ y'' - 2y' - 3y = -3x + 1 \qquad b)\ y'' - 2y' - 3y = 4e^{-x}$$
$$c)\ y'' + y = 5e^x \sin x \qquad d)\ y'' + y = 2\cos x$$